Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued
Faculté des Sciences Exactes
Département de Mathématiques

25/01/2022

$2^{\text{ème}}$ **Année Master (Mathématiques Fondamentales)**

Espaces fonctionnels et théorèmes du point fixe

Examen (corrogé)

Durée : 1h

Exercice 1 (8 points)

Soient $p \in]1, +\infty[$, et $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions réelles définies sur l'intervalle $]0, 1[$ par

$$f_n(x) := n^{1/p} e^{-nx}$$

Montrer que

(i) La suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ est bornée dans $L^p(]0, 1[)$.

(ii) La suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0 dans $L^p(]0, 1[)$.

(iii) La suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ ne converge pas fortement vers 0 dans $L^p(]0, 1[)$.

Réponse (exercice 1) :

(i)

Montrons que la suite $\|f_n\|_{L^p}$ e n :

$$\|f_n\|_{L^p}^p = \int_0^1 (f_n(x))^p \, dx = \int_0^1 n e^{-pnx} dx = \frac{1 - e^{-pn}}{p} \leqslant \frac{1}{p}, \quad \forall n \geqslant 1.$$

Ce qui montre que la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ e $L^p(]0, 1[)$.

(ii)

Rappel (voir TD-02) : On sait que, si

(1) la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ e $L^p(]0, 1[)$, et

(2) il existe D dense dans le dual $(L^p(]0, 1[))^*$: $\overline{D}^{L^p(]0,1[)} = (L^p(]0, 1[))^*$,

alors, pour que la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers f dans $L^p(]0, 1[)$, il suffit que

$$\forall \varphi \in D, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx = \int_0^1 \varphi(x) f(x) dx.$$

Soit $\mathcal{C}_c(]0, 1[)$ l'ensemble de

dans l'intervalle $]0, 1[$.

(1) On sait d'aprè (i), que la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ e
dans $L^p(]0, 1[)$.

(2) On sait que l'e $\mathcal{C}_c(]0,\,1[)$ de

compact dans l'intervalle $]0,\,1[$ e $L^p(]0,\,1[)$:

$$\overline{\mathcal{C}_c(]0,\,1[)} = L^{\frac{p}{p-1}}(]0,\,1[) = (L^p(]0,\,1[))^*\,.$$

D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(]0,\,1[)$, il existe deux réel a et b tel $supp(\varphi) = [a,\,b] \subset]0,\,1[$, et $M > 0$ tel que $|\varphi(x)| \leqslant M, \;\; \forall x \in]0,\,1[$. Ainsi,

$$|\int_0^1 \varphi(x) f_n(x) dx| \leqslant M \int_a^b n^{\frac{1}{p}} e^{-nx} dx \leqslant M n^{\frac{1}{p}} e^{-na} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par conséquent, $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers 0 dans $L^p(]0,\,1[)$.

(iii)

Pour que $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge fortement vers 0 dans $L^p(]0,\,1[)$, il faut qu'elle vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - 0\|_{L^p} = \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{L^p} = 0,$$

or,

$$\|f_n\|_{L^p}^p = \int_0^1 (f_n(x))^p\, dx = \int_0^1 n e^{-pnx} dx = \frac{1 - e^{-pn}}{p} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{p} \neq 0.$$

Donc la suite $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ ne converge pas fortement vers 0 dans $L^p(]0,\,1[)$.

Exercice 2 (12 points)

On désigne par $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier. Notons la transformée d'une fonction f par $\hat{f}$.

(1) Soit f une fonction réelle dans $L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si f est paire, alors[1]

$$\overset{\wedge}{\hat{f}}(t) = f(t) \quad p.p. \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

(2) Soit $f(x) := e^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\hat{f}(\omega)$.

(3) Soit $g(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, calculer $\hat{g}(\omega)$.[2]

(4) Rappeler la formule de la transformation de Fourier d'une dérivée ($\mathcal{F}(\frac{dh}{dx}) = ?$), et en déduire $\hat{h}(\omega)$, où la fonction réelle h est définie par $h(x) := \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$..

Réponse (exercice 2) :

(i)

On sait d'aprè

de Fourier (voir le cours), que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\overset{\wedge}{\hat{f}}(t) = f(-t) \quad p.p. \quad \textbf{sur } \mathbb{R}.$$

Puisque f e $f(-t) = f(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$), on a bien

$$\overset{\wedge}{\hat{f}}(t) = f(t) \quad p.p. \quad \textbf{sur } \mathbb{R}.$$

(ii)

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\omega\tau} e^{-|\tau|} d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} e^{-2\pi i\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau} e^{-2\pi i\omega\tau} d\tau.$$

Donc

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau(1-2\pi i\omega)} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau(1+2\pi i\omega)} d\tau = \frac{1}{1-2\pi i\omega} + \frac{1}{1+2\pi i\omega} = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}$$

1. Utiliser la formule de l'inversion.
2. Indication : $\mathcal{F}(\lambda h(\lambda x))(\omega) = \mathcal{F}(h)(\frac{\omega}{\lambda}) \quad \forall \lambda > 0.$

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \frac{2}{1+4\pi^2\omega^2}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}}$$

(iii)

La fonction $f(x) := e^{-|x|}$ e (i) et (2) ; on a

$$\mathcal{F}\left(\frac{2}{1+4\pi^2x^2}\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(\hat{f}\right)(\omega) = \hat{\hat{f}}(\omega) = f(\omega) = e^{-|\omega|}. \qquad (\star)$$

Donc, pour la fonction $g(x)$ on obtient

$$\hat{g}(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}\right)(\omega) = \pi\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}\right)(\omega).$$

Sachant que $\mathcal{F}(\lambda f(\lambda x))(\omega) = \mathcal{F}(f)(\frac{\omega}{\lambda})$ $\forall \lambda > 0$, en po $\lambda = \frac{1}{2\pi}$, d'aprè $(\star)$ on obtient

$$\boxed{\hat{g}(\omega) = \pi\mathcal{F}\left(\frac{2}{1+4\pi^2x^2}\right)(2\pi\omega) = \pi e^{-2\pi|\omega|}}. \qquad (\star\star)$$

(iv)

Pour toute fonction $h \in C^1(\mathbb{R})$ telle que $\frac{dh}{dx} \in L^1(\mathbb{R})$ on a $\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{dh}{dx}\right)(\omega) = 2i\pi\omega\mathcal{F}(h)(\omega)}$.

En po $h(x) := \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$, on a $h(x) = -\frac{1}{2}\frac{dg}{dx}(x)$. Donc

$$\hat{h}(\omega) = -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{dg}{dx}\right)(\omega) = -\frac{1}{2}2i\pi\omega\mathcal{F}(g)(\omega) = i\pi\omega\,\hat{g}(\omega),$$

et d'aprè $(\star\star)$, on a

$$\boxed{\hat{h}(\omega) = i\pi^2\omega e^{-2\pi|\omega|}}.$$