الحل النموذجي - مقياس الطبولوجيا - الثانية ماستر

Exercice (01) : (8 pts) : $f_n(x) = \sin\left(\sqrt{x+4n^2\pi^2}\right)$. $\mathcal{H} = \{f_n\}_{n\geq 1}$

1/ $\mathcal{H}$ équicontinue :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$: f_n derivable sur $[0, +\infty[$;

$$f_n'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+4n^2\pi^2}}\cos\sqrt{x+4n^2\pi^2} \quad (1)$$

alors : $$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+4n^2\pi^2}} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4n^2\pi^2}} = \frac{1}{4n\pi} \leq \frac{1}{4\pi} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

alors : $\forall x, y \in [0, +\infty[$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{4\pi}|x-y| \quad (1)$$

alors :

$\forall x \in [0, +\infty[$; $\forall \varepsilon > 0$; $\forall y \in B(x, 4\pi\varepsilon) = V_x$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{4\pi}|x-y| < \frac{1}{4\pi}4\pi\varepsilon = \varepsilon. \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

on a $\mathcal{H}$ équicontinue

2/ (f_n) converge simple : soit $x \in [0, +\infty[$; $n \in \mathbb{N}^*$; on a

$$f_n(x) = \sin\left(\sqrt{x+4\pi^2n^2}\right) = \sin\left(2n\pi\sqrt{1+\frac{x}{4n^2\pi^2}}\right)$$

$$= \sin\left(2n\pi + \frac{x}{4n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sin\left(\frac{x}{4n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (2)$$

$$= \frac{x}{4n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

alors si $n \to +\infty$: $f_n(x) \longrightarrow 0$

3/ on pose : $x_n = \frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2 \in [0, +\infty[$, $f_n(x_n) = 1$

alors $\|f_n - 0\| = 1 \not\longrightarrow 0 \quad (2)$

Donc la convergence n'est pas uniforme.

Ex(02) : (12 pt)

I/- $x_0 \in E$.

1/- On définie : $V = \langle x_0 \rangle = \{ \lambda x_0 / \lambda \in \mathbb{K} \}$. 1

et définie : $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda x_0 \longmapsto \lambda \|x_0\|$. 1

alors : • g forme linéaire sur V

• $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \|x\|$ / p : norme sur E. 1

• $\forall\ x \in V : g(x) \leq p(x)$.

Alors, il existe une forme linéaire f sur E prolongeant g (Théorème Hahn-Banach), et vérifiant : 1

$$\forall x \in E : \quad f(x) \leq p(x).$$

• f continue, puisque $|f(x)| \leq \|x\|$. 1

donc $f \in E'$.

• $f(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|$ 1

• $\|f\|_{E'} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{f(x)}{\|x\|} \leq \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = 1$ .... (1)

• $\|f\|_{E'} \geqslant \sup\limits_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \dfrac{g(x)}{\|x\|} = \sup\limits_{\substack{\lambda \in \mathbb{R} \\ \lambda \neq 0}} \dfrac{\lambda \|x_0\|}{|\lambda| \|x_0\|} = 1$ ... (2)

(1), (2) donne $\|f\|_{E'} = 1$ 2

2/- $x \in E$: • $\forall f \in E'$; $\|f\|_{E'} \leq 1$

On a ; $f(x) \leq \|f\| . \|x\| \leq \|x\|$

i.e $\max\{ f(x) / f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1 \} \leq \|x\|$ ... (1)

• soit $f_0 \in E'$ / $f_0(x) = \|x\|$ et $\|f_0\| = 1$ (précédent question)

donc $\max\{ f(x) / f \in E', \|f\| \leq 1 \} \geq f_0(x) = \|x\|$ ... (2) 2 alors ①, ② donne : $\operatorname{Max}\{f(x) \,/\, f \in E' ; \|f\| \leq 1\} = \|x\|$.

II/- Soit A, B bornés,

$\forall V \in \mathcal{V}(0)$; $\exists U \in \mathcal{V}(0) \,/\, U + U \subset V$

- A borné : $\exists s > 0 : \forall t \geq s :\ A \subset tU$
- B borné : $\exists s' > 0 ; \forall t \geq s' ;\ B \subset tU$

prend $s_0 = \max(s, s') > 0$:

$$\forall t \geq s_0 ;\quad A + B \subset tU + tU \subset t(U + U) \subset tV$$

alors $A + B$ borné.

3