Université Echahid Hamma Lakhdar
Faculté des Sciences Exacts
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2021/2022
Module : Equations Intégrales
Niveau : 2 Année Master

Examen d'Equations Intégrales

Nom et Prénom : .... **Groupe** :.......... **Durée** : **60 min**

1 . Soit l'équation intégrale (E) suivante:

$$\varphi(x) = e^{x} + \int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt \ ,$$

où $k(x,t) = \begin{cases} 9t(1-x), 0 \le t \le x \\ 9x(1-t), x \le t \le 1 \end{cases}$

a) Transformer l'équation (E) à équation différentielle.

On a $\varphi(x) = e^{x} + \int_0^x 9t(1-x)\varphi(t)dt + \int_x^1 9x(1-t)\varphi(t)dt.$

D'où

$\varphi'(x) = e^{x} + 9\int_0^x t\varphi(t)dt + 9\int_x^1 (1-t)\varphi(t)dt$

$\Rightarrow \boxed{\varphi''(x) + 9\varphi(x) = e^{x}}$ 6

On remarque que :

$\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 1$.

b) En déduire la solution de l'équation (E).

On a $\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3i, \lambda_2 = 3i$

$\varphi(x) = A\cos 3x + B\sin 3x$

$\varphi(0) = \varphi'(0) = 1 \Longrightarrow \boxed{A = 1} \ \boxed{B = \frac{1}{3}}$ 4

$\boxed{\varphi_h(x) = \cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x}$ on remarque $\varphi_p(x) = \alpha e^{x}$

D'où $\boxed{\varphi_p(x) = \frac{1}{\ldots} e^{x}}$, $\boxed{\varphi(x) = \cos 3x \ldots 1 \ldots 1 \ldots x}$ [illegible]

2. Résoudre l'équation intégrale suivante:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x\,\cos t)\,\varphi(t)\,dt = \sin x, \quad \lambda \neq 2.$$

On a

$$\varphi(x) = \sin x + \lambda \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\varphi(t)\,dt$$

On pose $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\varphi(t)\,dt$ (*)

D'où $\boxed{\varphi(x) = \sin x + \lambda C \sin x}$

5

Par (*) $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,(\sin t + \lambda C \sin t)\,dt$

$\Rightarrow C = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} C \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2-\lambda}}$, $\lambda \neq 2$

D'où $\varphi(x) = \sin x + \frac{\lambda}{2-\lambda}\sin x$

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{2}{2-\lambda}\sin x, \quad \lambda \neq 2}$$

3. Résoudre l'équation intégo-différentielle suivante par la transformation de Laplace:

$$\varphi''(x) + \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt = e^{2x} \quad \text{où} \quad \varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 1.$$

Indication: $L\left(e^{at}\right) = \dfrac{1}{p-a}, L(1) = \dfrac{1}{p}.$

5

On sait que $\mathcal{L}(\varphi''(x)) = p^2\,\Phi(p) - p\varphi(0) - \varphi'(0)$

$= p^2\,\Phi(p) - 1.$

D'où $\mathcal{L}(\varphi''(x)) + \mathcal{L}\left[\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)\,dt\right] = \mathcal{L}(e^{2x})$

$\Rightarrow p^2\,\Phi(p) - 1 + \frac{p}{p-2}\Phi(p) = \frac{1}{p-2}$

$\Rightarrow \frac{p(p-1)^2}{p-2}\Phi(p) = \frac{p-1}{p-2} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{1}{p(p-1)}$

$= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

BONNE CHANCE

$\Rightarrow \boxed{\varphi(x) = e^x - 1}$