Solution de l'examen (2021/2022)

Exo 1 (9 pts)

1/ $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \varphi_2\rangle = (\alpha\varphi_1 + \varphi_2)'(x_0) = \alpha\varphi_1'(x_0) + \varphi_2'(x_0)$$ ②

$$= \alpha\langle T, \varphi_1\rangle + \langle T, \varphi_2\rangle \Rightarrow T \text{ est linéaire}$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R})$ ($\mathrm{Supp}\,\varphi \subset K$) :

$$|\langle T, \varphi\rangle| = |\varphi'(x_0)| \leq 1 \sum_{k\leq 1} \sup_{x\in K} |\varphi^{(k)}(x)|$$ ①

$\Rightarrow T$ est une distribution d'ordre ≤ 1 (0.5)

2/

(i) On a le théorème suivant (pour $\Omega = \mathbb{R}$) :

Soit $K \subset \mathcal{O} \subset \Omega$ tq K compact et $\mathcal{O}$ ouvert, alors $\exists\, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

tq : $$\begin{cases} 0 \leq \psi(x) \leq 1 & \text{sur } \Omega \\ \psi(x) = 1 & \text{sur } K \\ \psi(x) = 0 & \text{sur } \mathcal{O}^c \end{cases}$$ ①

Il suffit donc de prendre $K = [x_0 - \frac{1}{4}, x_0 + \frac{1}{4}]$ et $\mathcal{O} =]x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}[$ (0.5)

(ii) Il est clair que $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ et puisque $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors

① $\varphi_n = f_n \cdot \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (produit d'une fct de classe C^∞ avec fonct $\mathcal{D}(\mathbb{R})$)

(iii) $\forall n \geq 1$: $$\langle T, \varphi_n\rangle = \varphi_n'(x_0) = f_n'(x_0)\overset{1}{\psi(x_0)} + \overset{0}{f_n(x_0)}\psi'(x_0)$$

$$= f_n'(x_0) = n\cos(n(x - x_0))\Big|_{x=x_0} = n$$ ①

3/ D'après la question précédente on a :

$$\exists K = [x_0 - 1/2, x_0 + 1/2], \forall n \in \mathbb{N}, \exists \varphi_{n+1} \in \mathcal{D}_K(\mathbb{R}) : |\langle T, \varphi_{n+1} \rangle| = n+1 > n$$

Ceci est la négation du fait que T est d'ordre 0. 1

Donc T n'est pas d'ordre zéro. Ainsi, d'après la première question, T est d'ordre 1. 1

EXO 2 (06 pts)

1/ Il est claire que f est continue sur $\mathbb{R}$ donc

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. 0,5

La formule explicite de $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : T_f = \langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cos x \,\varphi(x)\,dx$$ 1

2/ Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (mais il y a pas de saut en zéro) alors.

$$(T_f)' = T_{f'} \;/\; f'(x) = \begin{cases} \cos x - x \sin x & x > 0 \\ -\cos x + x \sin x & x < 0 \end{cases}$$ 0,5

Il est claire que f' est continue sur $\mathbb{R}^*$ et, on a :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f'(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 0} f'(x) = -1 \implies \sigma'_0 = 2$$ 1

Donc d'après la formule des saux, on a :

$$(T_f)'' = T_{f''} + 2\delta_0 \quad / \quad f''(x) = \begin{cases} -2\sin x - x\cos x & x > 0 \\ 2\sin x + x\cos x & x < 0 \end{cases}$$

1

Exo3 (05 pts)

1/ Il est claire (facile à vérifier) que $f_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f_n \in D'(\mathbb{R})$

2/ $\{f_n\} \subset D'(\mathbb{R})$. On dit que $f_n \longrightarrow f \in D'(\mathbb{R})$ ssi

1,1

$\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$: $\langle f_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle f, \varphi \rangle$ dans $\mathbb{R}$.

3/ $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$:

$$0 \leq |\langle f_n, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} n x \chi_{[0, 1/n]}(x)\, \varphi(x)\, dx \right| = \left| \int_0^{1/n} n x \varphi(x)\, dx \right|$$

2

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|\, n \int_0^{1/n} x\, dx = \sup_{x \in \mathbb{R}} n \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{1/n} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \langle f_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \iff \{f_n\} \longrightarrow 0 \text{ dans } D(\mathbb{R}).$$