جامعة الشهيد محمد لخضر
كلية العلوم الدقيقة
قسم الرياضيات

2022

الحل النموذجي لامتحان جبر 1

I التمرين الأول : نبرهن أن $B \subset A$ و $A \subset B$

$\underline{B \subset A}$: نعوض مباشرة في المعادلة : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 4t+3 \end{cases}$

$$4(t+1) - (4t+3) = 4t+4-4t+3$$
$$= 1$$

$\underline{A \subset B}$: لدينا : $4x - y = 1$ اذا

$$y = 4x - 1$$
$$= 4(x-1+1) - 1$$
$$= 4(x-1) + \cancel{4} - 1$$
$$= 4(x-1) + 3$$

نضع $t = x-1$ أي : $x = t+1$

نجد $y = 4t+3$

II

① $f(x,y) = (x+y, xy) = (y+x, yx) = f(y,x)$

لأن $(+)$ و $(\cdot)$ تبديليان في $\mathbb{R}$.

② الصورة العكسية لـ $(0,1)$:

$$f^{-1}(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x,y) = (0,1)\}$$

أي : $(x+y, xy) = (0,1)$

$$\begin{cases} x+y = 0 & \dots (a) \\ xy = 1 & \dots (b) \end{cases}$$

من (a) : $x = -y$ ثم نعوض في (b) نجد

$$1 = xy = (-y)y = -y^2$$

(مستحيل) اذا ليس لدينا حل ومنه

$$f^{-1}(0,1) = \phi$$

- f ليس متباين وذلك من السؤال ①
- من السؤال ② $(0,1)$ ليس لها سابقة اذا f ليس غامر

مسألة :

1) (G زمرة تبديلية $\Leftrightarrow$ f تشاكل زمر من G نحو G)

أ: $\Leftarrow$ نفرض أن G تبديلية

$$\forall x,y \in G: \quad f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} \quad (\text{لأن } G \text{ تبديلية}) = f(x)\cdot f(y)$$

ب: $\Rightarrow$ (f تشاكل). ليكن x, y عنصرين من G

نبرهن أن $xy = yx$

$$f(xy) = (xy)^{-1}$$

$$f(x)f(y) = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1}$$

f تشاكل يستلزم :

$$(xy)^{-1} = (yx)^{-1}$$

اذا $xy = yx$

2) لدينا $xyz = e$:

$$xyz = e$$

$$x^{-1}xyz = x^{-1}$$

$$yz = x^{-1}$$

$$yzx = x^{-1}x = e$$

اذا $yzx = e$ محققة .

بالنسبة لـ $yxz = e$ ؛ نقارنها بـ (مثلا $xyz = e$)

نستنتج :

$$xyz = yxz$$

$$xyzz^{-1} = yxzz^{-1}$$

$$xy = yx$$

اذا نلاحظ أنه لتتحقق العلاقة يشترط التبديل بين x و y

3) نبرهن أن العلاقة $(x \sim y) \Longleftrightarrow (x=y$ أو $x=y^{-1})$ علاقة تكافؤ

أ- انعكاسية :

$\forall x \in G: \quad x = x \Rightarrow x \sim x$

ب- تناظرية :

$\forall x,y \in G: \quad (x \sim y \Rightarrow y \sim x)$

$x \sim y \Rightarrow (x=y$ أو $x = y^{-1})$

$\Rightarrow (y = x$ أو $y = x^{-1})$

$\Rightarrow y \sim x$

ج- متعدية :

$\forall x,y,z \in G: (x\sim y)$ و $(y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$

$(x\sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow \begin{cases} (x=y) \text{ أو } (x=y^{-1}) \\ (y=z) \text{ أو } (y=z^{-1}) \end{cases}$

لدينا أربع حالات :

1) $x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z \Rightarrow x\sim z$

2) $x=y \wedge y=z^{-1} \Rightarrow x=z^{-1} \Rightarrow x\sim z$

3) $x=y^{-1} \wedge y=z \Rightarrow x=z^{-1} \Rightarrow x\sim z$

4) $x=y^{-1} \wedge y=z^{-1} \Rightarrow x=z \Rightarrow x\sim z$

• صنف تكافؤ x : $\dot{x} = \{y \in G \,/\, y \sim x\}$

$= \{y \in G \,/\, y = x$ أو $y = x^{-1}\}$

$= \{x \,;\, x^{-1}\}$

4) $Z(G) = \{a \in G,\ \forall x \in G : ax = xa\}$ (ز ج من G)

$(e$ حيادي$)$: $\forall x \in G : ex = xe \Rightarrow e \in Z(G) \Rightarrow Z(G) \neq \phi$

$(a,b \in Z(G) : \ ab^{-1} \in Z(G) \ ?)$

$a \in Z(G) \Rightarrow \forall x \in G: \ ax = xa$

$ab^{-1}bx = xab^{-1}b$

بما أن $b \in Z(G)$ إذا :

$(ab^{-1})bx = x(ab^{-1})b$

$ab^{-1}xb = x(ab^{-1})b$

$\Rightarrow ab^{-1}x = xab^{-1}$

في حالة G تبديلية : $Z(G) = G$

5

زمرة $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$

$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{11}\}$

$\langle \bar{6} \rangle = \{\bar{6}, \bar{0}\}$

$\langle \bar{7} \rangle = \{\bar{7}, \bar{2}, \bar{9}, \bar{4}, \overline{11}, \bar{6}, \bar{1}, \bar{8}, \bar{3}, \overline{10}, \bar{5}, \bar{0}\}$.
$= \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

$\langle \bar{8} \rangle = \{\bar{8}, \bar{4}, \bar{0}\}$

$\langle \bar{8} \rangle \cap \langle \bar{6} \rangle = \{\bar{0}\}$.