جامعه الشهيد حمه لخضر

كليه العلوم الدقيقـه
قسم الريـاضيــات
المستوى: ثانيه ماستر

التاريـخ:17 جانفي 2022
المقياس: ذبذبه المعادلات التفاضليه
المده: 60 د

تصحيح الإمتحان

التمرين 1 :(8 نقاط)

لتكن المعادله التفاضليه غير الخطيه التاليه:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y+\epsilon\alpha y^2+\epsilon^2\beta y^3=0;\quad y(0)=A,\ \frac{dy(0)}{dt}=0, \qquad \textbf{(1)}$$

$$0<\epsilon<<1,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}^*.$$

* أوجد الحل التقريبي للاندماج من الرتبه الأولى للمعادله (1).

لدينا

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=\epsilon\left(-\alpha y^2-\epsilon\beta y^3\right)\Rightarrow F=-\alpha y^2-\epsilon\beta y^3$$ (1 نقطه)

الحل التقريبي للاندسة من الرتبه الاولى هو

$$y(\theta,\epsilon)=y_0(\theta)+\epsilon y_1(\theta) \qquad (2)$$

(نقطه 0.5+0.5)

$$\omega(\epsilon)=1+\epsilon\omega_1+.. \qquad (3)$$

و المعادلات $y_0(\theta)$, $y_1(\theta)$ و هم

$$\ddot{y}_0+y_0=0, \qquad (4)$$ **(نقطه 0.5)**

$$\ddot{y}_1+y_1=-2\omega_1\ddot{y}_0-\dot{y}_0{}^2, \qquad (5)$$ **(0.5نقطه)**

حل المعادله (4) هو $y_0(\theta)=A\,cos\theta$. (1نقطه) نعوض النتيجه في المعادله (5), نجد

$y_1(\theta)$, تحت الشروط الابتدائيه $y_1(\theta)=\dot{y}_1(\theta)=0$, إذن

$$y_1(\theta)=\frac{\alpha A^2}{6}\left(-3+2cos\theta+cos2\theta\right),\omega_1=0) \qquad (6)$$ **(نقطه 1+1)**

أخيرا, التقريبه الاولى لحل المعادله (1)

$$y(\theta,\epsilon)=Acos\theta+\epsilon\frac{\alpha A^2}{6}\left(-3+2cos\theta+cos2\theta\right)+O\left(\epsilon^2\right),$$ **(نقطه 1)**

حيث $\theta=\omega t$ و

$$\omega(\epsilon)=1+O\left(\epsilon^2\right), \qquad (7)$$ **(نقطه 1).**

التمرين 2 :(12 نقطة)
نعتبر النظام الديناميكي غير الخطي التالي:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu(1-y^2)x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases} \quad , \mu \geq 0. \qquad \textbf{(8)}$$

1. طبق نظريه تشعب هوبف على الجمله (8). وما نوعه؟

2. من أجل $y = r\,sin\,\theta,\ x = r\,cos\,\theta$ أحسب $\frac{dr}{d\theta}$ وإستنتج الدورات الحدية

الإجابة 1. تطبيق نظريه تشعب هوبف على الجمله (2):
نلاحظ أن المبدأ $(0,0)$ هو نقطه توازن للنظام. **(نقطه 0.5)**
المصفوفه اليعقوبيه للنظام عند المبدأ هي:

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ **(نقطه 0.5)**

لدينا

$$P_J(\lambda) = \begin{vmatrix} \mu-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\mu + 1 = 0, \mu \in [0,2[$$ **(نقطه 0.5+0.5)**

القيم الذاتيه للمصفوفه J مركبه ومترافقه ومساويه لـ $\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4-\mu^2}$ (1 نقطه) .

1. (1 نقطه) $\alpha(\mu_0) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}\mu = 0 \Rightarrow \mu_0 = 0,$
2. (1 نقطه) $sgn(w) = sgn(\frac{\partial g_\mu}{\partial x} \mid_{\mu=0} (0,0)) = 1, w = 1.$
3. (1 نقطه) $\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \mid_{\mu=0} = \frac{1}{2} = d > 0.$
4. $a = \frac{1}{16}\left[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}\right] + \frac{1}{16}\left[(f_{xy}(f_{xx}+f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx}+g_{yy})) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}\right]$.
نعوض في a فنجد: (1 نقطه) $a = 0.$

- لأن $a = 0$ إذن التشعب هو متدهور (1 نقطه)

2. من أجل $y = r\,sin\,\theta,\ x = r\,cos\,\theta$ أحسب $\frac{dr}{d\theta}$.

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = x\left(\mu(1-y^2)x - y\right) + y\,(x) = \mu(1-y^2)x^2$$
$$\Rightarrow \dot{r} = \mu(1-r^2sin^2\theta)rcos^2\theta$$ **نقطه 1)**

$$\dot{\theta} = \frac{1}{r^2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = \frac{1}{r^2}\left(x^2 - y\left(\mu(1-y^2)x - y\right)\right) = cos^2\theta - cos\theta sin\theta\mu(1-r^2sin^2\theta) - sin^2\theta$$ **نقطه 1)**

$$\Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{\mu(1-r^2sin^2\theta)rcos^2\theta}{1-cos\theta sin\theta\mu(1-r^2sin^2\theta)} = \mu\overset{0}{f}(r)$$

حيث

$$\overset{0}{f}(r) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(1-r^2sin^2\theta)rcos^2\theta d\theta = \frac{r}{8}\left(r^2-4\right) \Rightarrow r = 0,\ ou\,r = 2.$$ **(نقطه 1)**

و لدينا أيضا

$$\left(\overset{0}{f}(2)\right)' = \frac{1}{4} \neq 0$$ إذن يوجد دوره حدية. **(نقطه 1)**