Université d'El-Oued, 1^{re} année Master Mathématiques .... :
Module : Topologie Générale .... :
.... :

Examen final le 20-01-2022 (**60 min**)

Exercice n°1 : Soient $(X, \|.\|)$ un $\mathbb{C}$-e.v.n, $B = \{e_1, e_2\}$ une base de X et $B_n = \{x \in X : \|x\| \leqslant n\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On pose

$$f : X \longrightarrow X \setminus f(x) = \|x\| \, e_1 + e_2.$$

1) f est injective ☐ vrai ■ faux **Rép:** f n'est pas injective car pour tout $x \neq 0$ on a :

$$f(-x) = f(x) \text{ alors que } x \neq -x.$$

2) f est surjective ☐ vrai ■ faux **Rép:** f n'est pas surjective car on a :

$$X = \{\alpha e_1 + \beta e_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{C}\} \text{ alors que } f(X) = \{\alpha e_1 + e_2 : \alpha \in \mathbb{R}_+\} \subsetneq X.$$

Mais il suffit de remarquer que

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = \gamma e_1 + \delta e_2 \iff \alpha = \gamma \text{ et } \beta = \delta.$$

Par exemple : pour $y = -2e_1 + ie_2 \in X, \nexists x \in X$ tel que $f(x) = y$ (car $\forall x \in X, \|x\| \geqslant 0$ et de plus $1 \neq i$).

3) f est continue ■ vrai ☐ faux **Rép:** f est continue (en tout $a \in X$) car on a :

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a). \text{ En effet :}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \|f(x_n) - f(a)\| &= \lim_{n \to +\infty} \|(\|x_n\| \, e_1 + e_2) - (\|a\| \, e_1 + e_2)\| \\
&= \lim_{n \to +\infty} \|(\|x_n\| - \|a\|) e_1\| = \lim_{n \to +\infty} |\|x_n\| - \|a\|| \, . \, \|e_1\| = 0.
\end{aligned}$$

Puisque par continuité de l'application norme on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} x_n = a &\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \|x_n\| = \|a\| \, , \text{ dans } (\mathbb{R}, |.|) \\
&\iff \lim_{n \to +\infty} |\|x_n\| - \|a\|| = 0.
\end{aligned}$$

4) $f(B_n)$ est compact dans $(X, \|.\|)$. ■ vrai ☐ faux **Rép:** On applique le

Théo : L'image directe d'un compact, dans un espace séparé, par une application continue, est aussi compact.

B_n (la boule fermée de centre 0 et de rayon n) est compact car fermée bornée dans un e.v.n de dimension finie (dim $X = 2$) et f est continue (d'après la question 3).

Donc $f(B_n)$ est compact dans $(X, \|.\|)$ (qui est évidemment séparé comme toute espace métrique)

5) $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ ■ vrai ☐ faux **Rép:** Il est claire que : $\forall x \in X, \exists n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x\| \leqslant n_x$.

i.e : $\forall x \in X, \exists n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in B_{n_x} \subset (\underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} B_n)$.

Donc $X = \underset{n\in\mathbb{N}^*}{\cup} B_n$. Rq : Vous pouvez montrer facilement que tout e.v.n n'est pas compact.

6) $(X, \|.\|)$ est un espace de Baire ■ vrai □ faux **Rép:** On applique simplement les deux théorèmes

Théo : toute e.v.n de dimension finie est complet. (pour la distance induite par sa norme).

Théo : toute espace complet est de Baire. (pour la topologie induite par sa distance).

7) (x_n) suite de Cauchy dans $(X, \|.\|) \implies (f(x_n))$ est convergente dans $(X, \|.\|)$ ■ vrai □ faux

Rép: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suite de Cauchy dans $(X, \|.\|)$ qui est complet donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans $(X, \|.\|)$. Or f est continue sur X donc $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente dans $(X, \|.\|)$.

Exercice n°2 : (Questions de cours) Soit (X, d) un espace métrique.

1) Montrer que : (X, d) compact $\implies \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in X^{\mathbb{N}^*} : A_d(x_n) \neq \varnothing$.

Rép: Lorsque X est un espace métrisable (donc séparé), **le théorème de Bolzano-Weierstrass** énonce que X est compact si et seulement si toute suite de X possède au moins une valeur d'adhérence et donc une sous-suite convergente.

La démonstration de $\implies$), qui est bien détaillée dans le cours, utilise les deux propositions suivantes :

a) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'un espace topologique quelconque (X, τ) et $A_p = \{x_n : n \geqslant p\}$, $p \in \mathbb{N}^*$.
L'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors donné par (démontré dans le TD n° 1) :

$$A_d(x_n) = \underset{p\in\mathbb{N}^*}{\cap} \overline{A_p}.$$

b) Si (X, τ) est un espace topologique compact alors toute suite $(F_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ décroissante de parties fermés non vides de X est d'intersection non vide.
(C'est une conséquence simple de la définition d'un compact énoncée dans le cours sans démonstration et donnée dans les exercices supplémentaires du TD n° 1).
Il suffit de poser ici :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : F_p = \overline{A_p}.$$

2) Montrer que : (X, d) compact $\implies (X, d)$ est complet.

Rép: La démonstration, qui est aussi dans le cours, devient simple en utilisant le théorème précédent et le résultat suivant (démontré aussi dans le TD n° 1) :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ suite de Cauchy et } a \in A_d(x_n) \implies \lim_{n\to+\infty} x_n = a.$$