ثانية رياضيات:
الأستاذ: نعاس محمد.

تصحيح امتحان التحليل العددي 1

التمرين الأول: (03 + 04 + 03)

1) المعادلة تقبل حلا وحيدا على المجال $[0,1]$

إذا تحقق:

أ) $f(0) \times f(1) < 0$

ب) الدالة f رتيبة تماما على $[0,1]$

لدينا: $f(0) \times f(1) = (-1) \times (1) < 0$ محقق.

$$f'(x) = xe^x + e^x + 1 - e^x = xe^x + 1$$

ومنه:

$$\forall x \in [0,1] ; \ f'(x) > 0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0,1]$

ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

2) نضع

$$x = g(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

الدالة g تحقق شروط تقارب النقطة الثابتة

إذا تحقق:

أ) $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$

ب) $|g'(x)| \leq k < 1$

أ) لدينا أولا

$$g'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$

إذن g متزايدة تماما على $[0,1]$

إذن ؛ من أجل

$$(0 \leq x \leq 0) \Longrightarrow g(0) \leq g(x) \leq g(1)$$

$$'' \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq g(x) \leq \frac{e}{1+e} < 1$$

ومنه : $\forall x \in [0,1] ; \quad g(x) \in [0,1]$

$$g([0,1]) \subset [0,1]$$

(يمكن استعمال الحصر)

ب) $|g'(x)| = \left|\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right| = \max_{x \in [0,1]} |g'(x)| < 1$

لأن $\forall x \in [0,1] \quad e^x < (1+e^x)^2$

تنعدم من أجل $x = 0$: $g''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$

ومنه : $|g'(x)| \leq K < 1$

حيث $K = \frac{1}{4}$

ومنه الدالة g تحقق شروط النقطة الثابتة.

التمرين الثاني: $^{(05)}$ العلامة المناسبة : =

التبرير: العلاقة تمثل تقريب طريقة شبه المنحرف

حيث خطأ التقريب معرف كما يلي :

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \left(\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \times M$$

$$M = \max_{[a,b]} f''(x)$$

بما أن f كثير حدود من الدرجة الأولى فإن؛

$f''(x) = 0 \quad (M = 0)$ ومنه؛

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \left(\frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right) \right) \right| \leq 0$$

ومنه نحصل على المساواة.

(يمكن وضع $f(x) = \alpha x + \beta \; (\alpha \neq 0)$ والتحقق من تساوي العبارتين)

التمرين الثالث: $(1+4 = 05)$

1) الفرق المركزي للدالة f':

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

من أجل: $f(x) = \ln x, \quad x = 1, \quad h = 0,1$

نجد:

$$f(1) \simeq \frac{\ln(1,1) - \ln(0,9)}{0,2}$$

$$\simeq 1,00334$$

أربع أرقام معبرة ودقيقة.

2) الخطأ المطلق المرتكب:

بما أن؛ $f'(x) = \frac{1}{x}$ فإن $f'(1) = 1$ ومنه؛

$$\Delta_{f'(1)} = |1,00334 - 1| = 0,00334$$