قسم الرياضيات

كلية العلوم الدقيقة **2022/2021**

الحل النموذجي لاختبار مقياس التحليل الهيلبرتي

التمرين الاول:

1) لدينا

$$|Tx| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq \sqrt{1^2 + 1^2}\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$$

$$|Tx| \leq \sqrt{2}\|x\|$$

2) $\langle x, y\rangle = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_1} + x_3 \times 0 = (x_1 + x_2)\overline{y_1} = 0$ ومنه $E \subset M^{\perp}$

3) إذا كان $(y_1, y_2, y_3) \in M^{\perp}$ فإن $\langle y, a\rangle = y_1 \times 1 + y_2 \times (-1) + y_3 \times 0 = 0$ وعليه يكون $y_1 = y_2$.
من جهة ثانية $\langle, b\rangle = y_3 = 0$ وعليه $y \in E$ وبالتالي $M^{\perp} \subset E$ ومن ثَمَّ المساواة.

4) بما أن M مغلق فإن $H = M \oplus M^{\perp}$ وبما أن $M^{\perp} = \mathrm{E}$ فإن $H = M \oplus E$.

التمرين الثاني

1) لنثبت أن T خطي.

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = (\alpha f + \beta g)(x) + \int_0^x (\alpha f + \beta g)(t)dt$$

$$= \alpha f(x) + \beta g(x) + \alpha \int_0^x f(t)dt + \beta \int_0^x g(t)dt = \alpha Tf(x) + \beta Tg(x)$$

(2

$$\|Tf\|_\infty \leq \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \sup_{0\leq x\leq 1} \left|\int_0^x f(t)dt\right|$$

$$\leq \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \sup_{0\leq x\leq 1} \int_0^x |f(t)|dt$$

$$\leq \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)| + \int_0^1 \sup_{0\leq t\leq 1} |f(t)|dt \leq 2\|f\|_\infty$$

3) من أجل $f_0(t) = 1$ يكون $\|f_0\|_\infty = 1$ و $(Tf)(x) = 1 + x$ فيكون $\|Tf_0\|_\infty = 2$
وعليه يكون $\|T\| = \|f_0\|_\infty\|T\| \geq \|Tf_0\|_\infty = 2$ وبالتالي $\|T\| \geq 2$ ومما سبق يكون $\|T\| = 2$.

(4

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 \left(f(x) + \int_0^x f(t)dt\right)dx$$

$$\leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)dt\right| dx$$

$$\leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|dt\, dx$$

$$\leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |f(t)|dt \int_0^1 dx$$

$$\leq 2\int_0^1 |f(x)|dx = 2\|f\|_1$$

وعليه فإن T محدود.