قسم الرياضيات	جـــــامعة الــوادي		
سنة أولـــى MI	كلية العلوم الدقيقة		

2022/01/19 تصحيح امتحان الدورة العادية في مقياس تحليل 1 المدّة: ساعة

حل التمرين الأول :(05ن)

1. اثبات أنّ: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* :\ x + \frac{1}{x} \geq 2$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* :\ x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

ومنه يكون $\forall x \in \mathbb{R}_+^* :\ x + \frac{1}{x} \geq 2$

2. استنتاج $\min(A)$ و $\inf(A)$ حيث:

$$A = \left\{ a = \frac{(m+n)^2}{mn} \,/\, (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

لدينا $a = \frac{(m+n)^2}{mn} = \frac{m^2+n^2+2mn}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2 \geq 2+2 = 4$

من أجل $m = n = 1$ لدينا $a = \frac{(1+1)^2}{1\times 1} = 4 \in A$

ومنه $\inf(A) = \min(A) = 4$

3. استنتاج $\min(B)$ ، $\inf(B)$ ، $\max(B)$ و $\sup(B)$ حيث:

$$B = \left\{ b = \frac{kn}{k^2+n^2} \,/\, (k,n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

من أجل $k = m / m \in \mathbb{N}^*$ لدينا $b = \frac{mn}{m^2+n^2}$

$$\frac{1}{b} = \frac{m^2+n^2}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2 \Rightarrow b = \frac{mn}{m^2+n^2} \leq \frac{1}{2}$$

من أجل $k = -m / m \in \mathbb{N}^*$ يكون $b = \frac{-mn}{m^2+n^2}$

ومما سبق لدينا $\frac{mn}{m^2+n^2} \leq \frac{1}{2}$ ومنه $b = \frac{-mn}{m^2+n^2} \geq -\frac{1}{2}$

ومنه $\forall (k,n) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^* : -\frac{1}{2} \leq b \leq \frac{1}{2}$

$\inf(B) = \min(B) = -\frac{1}{2}$ و $\sup(B) = \max(B) = \frac{1}{2}$

حل التمرين الثاني :(05ن) لكل سؤال من الأسئلة الخمسة التالية إجابة واحدة صحيحة من بين الإجابات المقترحة. ضع علامة (×) أمام الإجابة الصحيحة لكل سؤال من هذه الأسئلة.

س1	المتتالية الحقيقية (q^n) لا تقبل نهاية إذا كان:
	$-1 < q < 1$
	$q \geq 1$
×	$q \leq -1$

س2	لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرّفة على $\mathbb{N}$
	إذا كانت (u_n) متقاربة فهي رتيبة ابتداء من رتبة معينة
x	إذا كانت (u_n) غير محدودة فهي متباعدة
	إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإنّ المتتالية (u_n) متزايدة

س3	لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين حقيقيتين معرّفتين على $\mathbb{N}$
	إذا كانت (u_n) و (v_n) متباعدتين فإنّ $(u_n + v_n)$ متباعدة
×	إذا كانت (u_n) و (v_n) متزايدتين فإنّ $(u_n + v_n)$ متزايدة
	إذا كانت $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$ فإنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

س4	لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرّفة على $\mathbb{N}$
	إذا كانت (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متقاربتين فإنّ (u_n) متقاربة
×	إذا كانت (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متجاورتين فإنّ (u_n) متقاربة
	إذا كانت المتتاليتان (u_{2n}) و (u_{2n+1}) رتيبتين و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ فإنّهما متجاورتان

س5	لتكن (u_n) متتالية حقيقية معرّفة على $\mathbb{N}$
×	إذا كانت (u_n) متقاربة فهي متتالية كوشي
	إذا كانت (u_n) محدودة فهي متتالية كوشي
	إذا كانت (u_n) متتالية كوشي فهي متتالية رتيبة

حل التمرين الثالث:(5ن)

1. اثبات أنّ الدالة $g : x \mapsto \cos\dfrac{\pi}{x}$ لا تقبل نهاية عند 0

لتكن المتتاليتين: $s_n = \dfrac{1}{2n}$ و $t_n = \dfrac{1}{2n+1}$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n+1} = 0$

بينما $\lim\limits_{n\to+\infty} g(s_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n\pi) = 1$

و $\lim\limits_{n\to+\infty} g(t_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\cos(2n+1)\pi = -1$

وبما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} g(s_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} g(t_n)$ فإنّ g لا تقبل نهاية عند 0.

2. لتكن الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(0)=0$ ومن أجل $x\neq 0$

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x}, & x>0 \\ \dfrac{x\sin x}{e^x-1}, & x<0 \end{cases}$$

أ) أثبات أنّ الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

الدالة f مستمرة على المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ لأنها مركب و جداء وحاصل قسمة دوال مستمرة على هذين المجالين.

لنثبت استمرارية f عند 0

$$\forall x>0 : -1 \le \cos\frac{\pi}{x} \le 1 \Rightarrow -x \le x\cos\frac{\pi}{x} \le x$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\cos\frac{\pi}{x} = 0 = f(0) \Rightarrow \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x\sin x}{e^x-1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x\frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} = 0\times\frac{1}{1} = 0 = f(0)$$

ومنه الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

ب) هل الدالة f من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$ ؟

لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \cos\dfrac{\pi}{x}$ وبما أنّ هذه النهاية غير موجودة حسب السؤال1 إذا f لا تقبل الاشتقاق عند 0

ومنه f ليست من الصنف C^1 على $\mathbb{R}$

حل التمرين الرابع:(5ن)

1- نص نظرية التزايدات المنتهية (نظرية لاغرانج).

إذا كانت f دالة مستمرة على مجال متراص $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$ فإنه يوجد على الأقل عددا $c\in]a,b[$ بحيث

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

2- باستعمال نظرية التزايدات المنتهية، اثبات أنّ:

$$\forall x>0 : \frac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln(x) < \frac{1}{x}$$

من أجل $x>0$ الدالة $f : t\mapsto \ln(t)$ مستمرة على المجال $[x,x+1]$ وقابلة للاشتقاق على $]x,x+1[$

ولدينا $\forall t\in]x,x+1[: f'(t) = \dfrac{1}{t}$ وحسب نظرية التزايدات المنتهية

$$\exists c\in]x,x+1[: f(x+1)-f(x+1) = f'(c)(x+1-x)$$

أي $\exists c\in]x,x+1[: \ln(x+1)-\ln(x) = \dfrac{1}{c}\ldots(1)$.

لدينا $x<c<x+1 \Rightarrow \dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}\ldots(2)$.

من (1) و(2) نجد $\forall x>0 : \dfrac{1}{x+1} < \ln(x+1)-\ln(x) < \dfrac{1}{x}$

3. حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x))$

$\dfrac{x}{x+1} < x\ln(x+1)-\ln(x) < \dfrac{x}{x}$ وبما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x} = 1$

حسب نظرية الحصر $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x)) = 1$

4. استنتاج أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)\right) = \exp(1) = e$$