Université Echahid Hama Lakhdar (El Oued) 2021/2022

Module d'Algèbre Linéaire **Nom et Prénom :** ....

1.Master Mathématiques *Groupe:*.................

Examen d'Algèbre

Exercice

Soit f forme bilinéaire dans $E = \mathbb{R}^3$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel de matrice associée

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

I)

1. Donner l'expression de la forme bilinéaire f ,est il symétrique? **(02+01)**

$$f(x,y) = {}^tX\,A\,Y = (x_1, x_1, x_3)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= x_1y_1 + 5x_2y_2 + 13x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 5x_2y_3 - 5x_3y_2$$

f est symetrique, car A est symétrique ${}^tA = A$

2. Donner la forme quadratique associeé a f. **(02)**

$$q(x) = f(x,x) = {}^tXAX = x_1^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 10x_2x_3$$

3. Donner une réduction de Gauss, en précisant le rang et la signature de q **(04)**

$$q(x) = (x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + 5x_2^2 + 13x_3^2 - 10x_2x_3$$
$$= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - (-2x_2 + x_3)^2 + 5x_2^2 + 13x_3^2 - 10x_2x_3$$
$$= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 12x_3^2$$
$$= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 - 9x_3^2 + 12x_3^2$$
$$= \underbrace{(x_1 - 2x_2 + x_3)^2}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{(x_2 - 3x_3)^2}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{3x_3^2}_{\frac{1}{4}}$$

4. Montrer que le forme bilinéaire f est bien définie positive **(01+01)**

- $\forall x \in E$: $q(x) = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 3x_3)^2 + 3x_3^2 \geq 0 \Rightarrow$ f est positive
- $q(X) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 3x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_2 - x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ f est Bien definie

5. Le forme f définit-elle un produit scalaire sur E? **(01)**

Oui, car f est une forme bilinéaire symétrique définie positive 1

II)
Soit u=(1,0,1) , v=(0,-1,1) deux vecteur de E tel que E muni de le produit scalaire f

1. Calculer la dimension de F=Vect$\{u, v\}$ **(01)**

$\{U.V\}$ est libre car $\alpha U + \beta V = 0_E \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

et comme $\{U.V\}$ engendrent F alors $\{U.V\}$ est une base de F

$\Rightarrow \dim F = \mathrm{Card}\{U.V\} = 2$ 1

2. Calculer le produit scalaire de u v,(ie. f(u,v) .) **(02)**

$\langle U.V \rangle = f(U.V) = (1)(0) + 5(0)(-1) + 13(1)(1) - 2(1)(-1) - 2(0)(0) + (1)(1) + (1)(0) - 5(0)(1) - 5(1)(-1) = 13 + 2 + 1 + 5 = \boxed{21}$

$\Rightarrow \langle U.V \rangle = 21$ 2

3.Déterminer une base orthonormée de F pour le produit scalaire f, en utilisant le procédé de Schmidt et la base {u , v} **(05)**

1ère étape : posons $W_1 = U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1 et déterminons $W_2 = V - r_{12} W_1$ 1

tq $r_{12} = \dfrac{\langle W_1, V \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle} = \dfrac{\langle UV \rangle}{\langle W_1, W_1 \rangle} = \dfrac{21}{16}$ / $\langle W_1, W_1 \rangle = 1 + 2 + 13 = 16$

donc $W_2 = V - \dfrac{21}{16} W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{21}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{21}{16} \\ -1 \\ \frac{-5}{16} \end{pmatrix}$ 1

$\{W_1, W_2\}$ est une base orthogonale de F

2ème étape Normaliser cette base

$\|W_1\| = \sqrt{\langle W_1, W_1 \rangle} = \sqrt{16} = 4$

$\|W_2\| = \sqrt{\dfrac{7}{16}} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

On obtient enfin une base orthonormée de F

$B = \left\{ V_1 = \dfrac{1}{4} W_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{pmatrix}, V_2 = \dfrac{4}{\sqrt{7}} W_2 = \dfrac{4}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -\frac{21}{16} \\ -1 \\ \frac{-5}{16} \end{pmatrix} \right\}$ 1 1