سنة ثالثة رياضيات

الحل النموذجي 01.

مقياس تحليل 04

التمرين 01:

اثبات أن $\|f\|_0 = \|f'\|_\infty + |f(0)|$ نظيم على E لأنه

من أجل كل التوابع f و g من E و λ من $\mathbb{R}$ لدينا

(1) $\|f\|_0 = 0 \iff (\|f'\|_\infty = 0$ و $|f(0)| = 0)$

$\iff \forall x \in [0,1]\ f'(x) = 0$ و $f(0) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1]\ f(x) \in \mathbb{R}\ \ f(0) = 0$

$\iff \forall x \in [0,1]\ \ f(x) = 0$

$\iff \ \ f = 0$

(2) $\|\lambda f\|_0 = \|(\lambda f)'\|_\infty + |(\lambda f)(0)|$

$= |\lambda| \|f'\|_\infty + |\lambda| |f(0)| = |\lambda| [\|f'\|_\infty + |f(0)|$

$= |\lambda| \|f\|_0$

(3) $\|f+g\|_0 = \|(f+g)'\|_\infty + |(f+g)(0)|$

$= \|f'+g'\|_\infty + |f(0)+g(0)|$

$\leq \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty + |f(0)| + |g(0)|$

$\leq \|f\|_0 + \|g\|_0$

اثبات أن $\|f\|_1 = \int_0^1 |f'(t)|dt + |f(0)|$ نظيم على E لأن

من أجل كل f و g من E و λ من $\mathbb{R}$ لدينا

(1) $\|f\|_1 = 0 \iff \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$ و $|f(0)| = 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\Rightarrow \forall x \in [0,1] \quad f'(x) = 0 \;, \; f(0) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in [0,1) \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

2) $\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |(\lambda f)'(t)| dt + |(\lambda f)(0)|$ (0,5)

$= \int_0^1 |\lambda f'(t)| dt + |\lambda f(0)|$

$= |\lambda| \int_0^1 |f'(t)| dt + |\lambda| |f(0)|$

$= |\lambda| \; \|f\|_1$

3) $\|f+g\|_1 = \int_0^1 |(f+g)'(t)| dt + |(f+g)(0)|$

$= \int_0^1 |f'(t) + g'(t)| dt + |f(0) + g(0)|$

$\leq \int_0^1 |f'(t)| dt + \int_0^1 |g'(t)| dt + |f(0)| + |g(0)|$

$\leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

ب) اثبات المتراجحة (1) $\|f\|_1 \leq \|f\|_0$

$\|f\|_1 = \int_0^1 |f'(t)| dt + |f(0)|$

$\leq \int_0^1 \sup |f'(t)| dt + |f(0)|$

$\leq \|f'\|_\infty \int_0^1 dt + |f(0)| =$

$\leq \|f'\|_\infty + |f(0)| = \|f\|_0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(٥) اختبر $f(x)(x)$ ، حساب المعطيات ، حساب
الـشـ

(1) n ميلك = $\frac{11f14}{18f16}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{xy}{z^2} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

1) حساب المشتقات الجزئية عند $(1,1,1)$ $(z \neq 0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{y}{z^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 1$ ✓ 1

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{x}{z^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 1$ ✓ 1

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{-2xy}{z^3} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = -2$ ✓ 1

2) تشكيل المفاضلة عند $(1,1,1)$

$\forall h = (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$

$$Df(1,1,1)(h_1,h_2,h_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)\,h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)\,h_3$$

1

$$Df(1,1,1)(h_1,h_2,h_3) = h_1 + h_2 - 2h_3$$

0.5

تبيان نثبت أن

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{\|o(\|h\|)\|}{\|h\|} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} \quad \text{ن}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((1,1,1)+(h_1,h_2,h_3)) - f(1,1,1) - Df(1,1,1)(h_1,h_2,h_3)}{\|h\|}$$

0.5

3/4

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(1+h_1, 1+h_2, 1+h_3) - f(1,1,1) - Df(1,1,1)(h_1,h_2,h_3)|}{\|h\|} =$$

نضع $\|h\| = \max(|h_1|, |h_2|, |h_3|)$

$|h_1| \leq \|h\|, \quad |h_2| \leq \|h\|, \quad |h_3| \leq \|h\|$

0,7

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left| \frac{(1+h_1)(1+h_2)}{(1+h_3)^2} - 1 - h_1 - h_2 + 2h_3 \right|}{\|h\|}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h_1 + h_2 + h_1h_2 - 2h_3 - 2h_3^2 - h_1 - 2h_3h_1 - h_1h_3^2 - h_2 - 2h_2h_3 - h_2h_3^2 + 2h_3 + 4h_3^2 + 2h_3^3|}{(1+h_3)^2 \|h\|}$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+h_3)^2\|h\|} 8\|h\|^2 \leq \lim_{h\to 0} \frac{8\|h\|}{(1+h_3)^2} = 0$$

3) هل f يقبل امتداد عند النقطة $(0,0,0)$ لا يقبل

لا f لأنه ليست مستمرة عند النقطة $(0,0,0)$

1/1

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) \neq f(0,0,0).$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين الثالث :

ثانيا

$$\varphi(p) = \int_0^1 p^3 + p^2 \, dt$$

$$\varphi(p+h) - \varphi(p) = \int_0^1 (p+h)^3 + (p+h)^2 dt - \int_0^1 p^3 + p^2 \, dt$$

$$= \int_0^1 p^3 + 3p^2h + 3ph^2 + h^3 + p^2 + 2ph + h^2 - p^3 - p^2 \, dt$$

$$= \underbrace{\int_0^1 3p^2h + 2ph \, dt}_{g(h)} + \underbrace{\int_0^1 3ph^2 + h^3 + h^2 \, dt}_{o(\|h\|)}$$

0,5 0,5

لدينا ان $g(h)$ خطي ومستمر

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$$

0,5

$$D\varphi(p)(h) = \int_0^1 h(3p^2 + 2p) \, dt$$

0,5

$$\psi(p) = p^2 - p^2$$

$$\psi(p+h) - \psi(p) = (p+h)^2 - (p+h)^2 - p^2 + p^2$$

$$= p^2 + h^2 - p^2 + 2ph + h^2 - p^2 + p^2$$

$$= \underbrace{h^2 + 2ph}_{g(h)} + \underbrace{h^2}_{o(\|h\|)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$$ و

g خطي ومستمر

$$D\psi(p)(h) = h^2 + 2ph.$$ ص

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

$D\varphi = \phi$ ، $\underbrace{D\varphi(p)(h)}_{\phi} = \int_0^1 h(3p^2+2p)dt$

$D\phi(p+h_1)(h) - D\phi(p)(k)$

$= \int_0^1 k(3(p+h_1)^2+2(p+h_1))dt$

$- \int_0^1 k(3p^2+2p)dt$

$= \int_0^1 3kp^2 + 3k\,2ph + 3kh^2 + 2pk + 2hk\,dt$

$- \int_0^1 3kp^2 + 2kp\,dt$

$= \int_0^1 6kph_1 + 3kh_1^2 + 2h_1k\,dt$

$= 6\int_0^1 kph_1 + 2h_1.k)dt + \int_0^1 3kh_1^2 dt$

$$\boxed{D^2\varphi(h_1, k) = 2\int_0^1 [3kph_1 + h_1k]dt}$$

$\phi : D\varphi(p)h = h^2 + 2ph$

$\phi(p+h_1)(k) - \phi(p)(k) =$

$= k^2 + 2(p+h_1)(k) - k^2 + 2pk$

$= \cancel{k\,2pk} + 2hk$

$D^2\varphi(h_1, h) = 2h_1.k$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$D^k y(1) = 0$

$D^n y(1)$

$\boxed{k \geq 4}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner