الحل النموذجي للمقياس تحليل 04

التمرين الأول :-

1) أ) اثبات أن $\|f\|_0=\|f'\|_\infty+|f(0)|$ نظيم على E

1) $\|f\|_0=0 \Leftrightarrow \|f'\|_\infty=0$ و $|f(0)|=0 \Leftrightarrow f'(x)=0\ \forall x\in[0,1]$ و $f(0)=0$

0.5

$$\Rightarrow \forall x\in[0,1]\ f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in[0,1]\ f=0$$

2) $\|\lambda f\|_0=\|(\lambda f)'\|_\infty+|(\lambda f)(0)|=|\lambda|\,\|f'\|_\infty+|\lambda|\,|f(0)|$

0.5

$$=|\lambda|\ \|f\|_0$$

3) $\|f+g\|_0=\|(f+g)'\|_\infty+|(f+g)(0)|$

0.5

$$=\|f'+g'\|_\infty+|f(0)+g(0)|$$

$$\leq \|f'\|_\infty+\|g'\|_\infty+|f(0)|+|g(0)|$$

$$\leq \|f\|_0+\|g\|_0$$

ب) اثبات أن $\|f\|_1=\int_0^1|f'(t)|dt+|f(0)|$ نظيم على E

1) $\|f\|_1=0 \Leftrightarrow \forall x\in[0,1]\ f'(x)=0$ و $f(0)=0 \Leftrightarrow f=0$

2) $\|\lambda f\|_1=\int_0^1|(\lambda f)'(t)|dt+|\lambda f(0)|=|\lambda|\int_0^1|f'(t)|dt+|\lambda|\,|f(0)|$

0.5

0.5

$$=|\lambda|\ \|f\|_1$$

3) $\|f+g\|_1=\int_0^1|(f+g)'(t)|dt+|(f+g)(0)|$

0.5

$$=\int_0^1|f'(t)+g'(t)|dt+|f(0)+g(0)|$$

$$\leq \int_0^1|f'(t)|dt+|f(0)|+\int_0^1|g'(t)|dt+|g(0)|$$

$$\leq \|f\|_1+\|g\|_1$$

ج) اثبات أن $\|f\|_1\leq\|f\|_0$

1

$$\|f\|_1=\int_0^1|f'(t)|dt+|f(0)|\leq\int_0^1\sup|f'(t)|dt+|f(0)|$$

$$\leq\|f'\|_\infty+|f(0)|=\|f\|_0$$

(1) C^2 ليس f، $f_n'(t)=\begin{cases}(1-nt) & 0\le t\le \frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le t\le 1\end{cases} \Leftarrow f_n(t)=\begin{cases}(1-nt) & 0\le t\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le t\le 1\end{cases}$ لدينا /3

$\|f\|_0=\|f'\|_\infty+|f(0)|=1+1=2$

$\|f\|_1=\int_0^1|f_n'(t)|dt+|f(0)|=\int_0^{\frac{1}{n}}2(1-nt)dt+1=2t-nt^2\Big|_0^{\frac{1}{n}}+1$

$=\frac{2}{n}-\frac{1}{n}+1=\frac{1}{n}+1$

ومنه $\frac{\|f\|_0}{\|f\|_1}=\frac{2}{\frac{1}{n}-1}$، ومنه ليست قيمة ثابتة بين α و β على تكافؤ النظيمين.

التمرين الثاني:

1) حساب المشتقات الجزئية عند $(1,1,1)$ أين $z\neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{y}{z^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)=1$ (1)

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{x}{z^2}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)=1$ (1)

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{-2xy}{z^3}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)=-2$ (1)

2) f تقبل المفاضلة عند $(1,1,1)$.

يكفي تأكد من أن $\lim\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|}$ $\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{o(\|h\|)}{\|h\|}=0$ (0.5)

نأخذ h من $\mathbb{R}^3$ أي $h=(h_1,h_2,h_3)$ و نأخذ $\|h\|=\max(|h_1|,|h_2|,|h_3|)$

$Df(a)(h)=Df(1,1,1)(h_1,h_2,h_3)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)h_2+\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)h_3$

$\boxed{Df(1,1,1)(h_1,h_2,h_3)=h_1+h_2-2h_3}$ (1)

$\lim_{h\to 0}\frac{\|f((1,1,1)+(h_1,h_2,h_3))-f(1,1,1)-Df(1,1,1)(h_1,h_2,h_3)\|}{\|h\|}$ (0.5)

$=\lim_{h\to 0}\frac{\|f(1+h_1,1+h_2,1+h_3)-1-h_1-h_2+2h_3\|}{\|h\|}$

$\|h\|\ge|h_1|$
$\|h\|\ge|h_2|$
$\|h\|\ge|h_3|$

$\lim_{h\to 0}\frac{\left\|\frac{(1+h_1)(1+h_2)}{(1+h_3)^2}-1-h_1-h_2+2h_3\right\|}{\|h\|}$

$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\cancel{h_1}+h_2+h_1h_2-\cancel{h_1}-2h_1h_3-h_1h_3^2-h_2-2h_2h_3-h_2h_3^2+2h_3+4h_3^2+2h_3^3}{(1+h_3)^2\|h\|}\right\|$

$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{h_1h_2-2h_1h_3-h_1h_3^2-2h_2h_3-2h_2h_3^2+2h_3+4h_3^2+2h_3^3}{(1+h_3)^2\|h\|}\right\|$

$\left\|\frac{1}{(1+h_3)^2}\right\| = \left\|\frac{1}{1+2h_3+h_3^4}\right\| \le \frac{1}{1+1+\frac{1}{4}} \le \frac{4}{9}$ بما أن $\|h\| \to 0$ فإنه على الأقل $\|h\| \le \frac{1}{2}$

نرجع للمساواة (*) نجد

$$\le \lim_{h\to 0} \frac{48}{9}\cdot\frac{\|h\|^2}{\|h\|} \le \lim_{h\to 0} \frac{32}{9}\|h\| = 0$$ (0,1)

3) f لا تقبل المفاضلة عند $(0,0,0)$ لأنها ليست مستمرة عند $(0,0,0)$.

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{y\to 0} \frac{xy}{z^2} = \infty \neq 0 = f(0,0,0)$$ (1,1)

التمرين الثالث:

حساب $D\varphi(p)$ ، التابع φ يقبل المفاضلة في جميع النقاط من الصف C^∞

لكل h من $E=\mathbb{R}_n[x]$ ، فإن $\varphi(p+h)-\varphi(p) \overset{?}{=} g(h)+o(\|h\|)$

$$\varphi(p+h)-\varphi(p) = \int_0^1 (p+h)^3+(p+h)^2\,dt - \int_0^1 p^3+p^2\,dt$$ (0,1)

$$= \int_0^1 p^3+3p^2h+3ph^2+h^3+p^2+2ph+h^2\,dt - \int_0^1 p^3+p^2\,dt$$ (0,1)

$$= \underbrace{\int_0^1 3p^2h+2ph\,dt}_{g(h)} + \underbrace{\int_0^1 3ph^2+h^3+h^2\,dt}_{o(\|h\|)}$$ (0,1)

g خطي ومستمر:

$$g(h_1+h_2) = \int_0^1 3p^2(h_1+h_2)+2p(h_1+h_2)\,dt$$

$$= \int_0^1 3p^2h_1+2ph_1\,dt + \int_0^1 3p^2h_2+2ph_2\,dt = g(h_1)+g(h_2)$$

$$g(\lambda h) = \int_0^1 3p^2\lambda h+2p\lambda h = \lambda\int_0^1 3p^2h+2ph = \lambda g(h)$$

$\exists M>0\ \forall h\in E\quad |g(h)| \le M\|h\|$

$$|g(h)| = \left|\int_0^1 3p^2h+2ph\,dt\right| \le \int_0^1 |3p^2+2p|\,|h|\,dt$$

$$\le \int_0^1 |3p^2+2p|\sup_{t\in[0,1]}|h(t)|\,dt \le \|h\|_\infty \int_0^1 |3p^2+2p|\,dt$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|o(\|h\|)|}{\|h\|} = \lim \frac{\left|\int_0^1 3ph^2+h^3+h^2\,dt\right|}{\|h\|} \le \frac{\|h\|^2\int_0^1 |3p+h+1|\,dt}{\|h\|}$$

$$\le \int_0^1 |3p+h+1|\,dt\ \|h\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

ومنه، بحيث

$$D\varphi(p)(h) = \int_0^1 h\,[3p^2+2p]\,dt$$ (0,1)

نضع $D\varphi = \phi$ ، نحسب $D^2\varphi(p)$

$\phi(p+h) - \phi(p) = g(h) + o(\|h\|)$ 0,5

$\phi(p+h)(k) - \phi(p)(k) = g(h,k) + o(\|(h,k)\|)$

$D\varphi(p+h)(k) - D\varphi(p)(k) = \int_0^1 k\left[3[p+h]^2 + 2(p+h)\right]dt - \int_0^1 k[3p^2+2p]dt$

$= \int_0^1 6kph + 3kh^2 + 2hk\, dt = \underbrace{\int_0^1 [6kph + 2hk]\,dt}_{\text{خطي } g(h,k)} + \underbrace{\int_0^1 3kh^2\,dt}_{o(\|h\|)}$

$= D^2\varphi(p)(h,k) = 2\int_0^1 (3kph + 2hk)\,dt$

$D^2\varphi(p)(h,k) = 2\int_0^1 (3p+2)(h,k)\,dt$ 0,5

~~نلاحظ أن $D^2\varphi(p)$ مستمر و ... تفاضلي~~

نكرر نفس العملية على $D^3\varphi(p)$ نجد $D^3\varphi(p)(h,k,l)$

$= 6\int_0^1 h\,k\,l\,dt$ 1

في هذه الحالة $D^3\varphi(p)$ ثابت فإن التفاضلات أكبر تماما من 3 معدومة $D^n\varphi(p) = 0$ عندما $\boxed{n \geq 4}$

2) $\psi(p) = p' - p^2$

ψ تابع معرف ومستمر ومن الصنف C^∞ تفاضلي قابل للتفاضل.

$\psi(p+h) - \psi(p) = (p+h)' - (p+h)^2 - p' + p^2$ 0,5

$= p' + h' - p^2 - 2ph - h^2 - p' + p^2$ 0,5

$= \underbrace{h' - 2ph}_{g(h)} - \underbrace{h^2}_{o(\|h\|)}$ 0,5

$g(h)$ خطي ومستمر وأيضا $\lim_{h\to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$

$D\psi(p)(h) = h' - 2ph$ 0,5

نحسب $D^2\psi(p)(h,k)$

$D\psi(p+h)(k) - D\psi(p)(k) = k' - 2(p+h)(k) - k' + 2pk$ 0,5

$= -2h\,k$

$D^n\psi(p) = 0$ 1 $n \geq 3$ | $D^2\psi(p)(h,k) = -2h\,k$ 0,5

نضع $D\varphi = \phi$ ، حساب $D^2\varphi(p)$

$$\phi(p+h) - \phi(p) = g(h) + o(\|h\|) \quad (0,5)$$

$$\phi(p+h)(k) - \phi(p)(k) = g(h,k) + o(\|(h,k)\|)$$

$$D\varphi(p+h)(k) - D\varphi(p)(k) = \int_0^1 k\left[3[p+h]^2 + 2(p+h)\right]dt - \int_0^1 k\left[3p^2+2p\right]dt$$

$$= \int_0^1 6kph + 3kh^2 + 2hk\,dt = \underbrace{\int_0^1 [6kph + 2hk]\,dt}_{g(h,k) \text{ خطي ومستمر}} + \underbrace{\int_0^1 3kh^2\,dt}_{o(\|h\|)}$$

$$= D^2\varphi(p)(h,k) = 2\int_0^1 (3kph + 2hk)\,dt$$

$$D^2\varphi(p)(h,k) = 2\int_0^1 (3p+2)(h,k)\,dt \quad (0,5)$$

نكرر نفس العملية على $D^3\varphi(p)$ نجد $D^3\varphi(p)(h,k,l)$

$$= 6\int_0^1 h\,k\,l\,dt \quad (1)$$

في هذه الحالة $D^3\varphi(p)$ ثابت في فرض التفاضلية أكبر تماما من 3

معدومة $D^n\varphi(p) = 0$ عندما $\boxed{n \geq 4}$

2) $\psi(p) = p' - p^2$

ψ تابع معرف ومستمر ومن الصنف C^∞ يقبل المفاضلة.

$$\psi(p+h) - \psi(p) = (p+h)' - (p+h)^2 - p' + p^2 \quad (0,5)$$

$$= p' + h' - p^2 - 2ph - h^2 - p' + p^2 \quad (0,5)$$

$$= \underbrace{h' - 2ph}_{g(h)} - \underbrace{h^2}_{o(\|h\|)} \quad (0,5)$$

$g(h)$ خطي ومستمر واضح . $\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{o(\|h\|)}{\|h\|} = 0$

$$D\psi(p)(h) = h' - 2ph \quad (0,5)$$

حساب $D^2\psi(p)(h,k)$

$$D\psi(p+h)(k) - D\psi(p)(k) = k' - 2(p+h)(k) - k' + 2pk \quad (0,5)$$

$$= -2h\,k$$

$D^n\psi(p) = 0 \quad (1) \quad n \geq 3$ | $D^2\psi(p)(h,k) = -2h\,k \quad (0,5)$