جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي

قسم الرياضيات

كلية العلوم الدقيقة

السنة الثانية رياضيات

2021/06/01

امتحان الدورة العادية في مقياس التحليل المركب

المدة الزمنية: 1 سا و15 د

التمرين الأول(06):

I) نعتبر التابع الحقيقي Q حيث $Q(x,y)=e^{-y}\sin x$

1) بين أن التابع Q توافقي - 2) عين مرافقه التوافقي $P(x,y)$

3) استنتج عبارة الدالة الهلمورفية $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$

II) بين أنه اذا كانت $g(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ دالة هلمورفية فإن $U_xV_x+U_yV_y=0$

حيث U_x,V_x,U_y,V_y المشتقات الجزئية الاولى للدالتين $U(x,y),V(x,y)$ بالنسبة لـ: x,y

التمرين الثاني(07):

احسب التكامل في كل حالة: $\int_\Gamma (1-i+2\bar{z})dz$

1) حيث Γ حامل القطعة المستقيمة $[z_1z_2]$ و $z_2=1+i, z_1=0$

2) حيث Γ القطع المكافئ ذي المعادلة $y=x^2$ و $z_2=1+i, z_1=0$

3) حيث Γ المضلع من $o(0,0)$ الى $A(1.0)$ ثم الى $B(1,1)$

4) قارن بين نتيجتي حساب التكامل في الحالتين 1 و 3 ماذا تستنتج؟ و لماذا؟

التمرين الثالث(07):

باستعمال صيغة كوشي احسب التكامل في كل الحالات

$$\oint_\gamma \frac{ze^{\pi z}}{(z-i)(z^2+1)}dz \quad \text{يمكن كتابة} \quad \left(\frac{ze^{\pi z}}{(z-i)(z^2+1)}=\frac{\frac{ze^{\pi z}}{z+b}}{(z-a)^2}\overset{\text{او}}{=}\frac{\frac{ze^{\pi z}}{(z-a)^2}}{z+b}\right)$$

حيث a,b اعداد مركبة يطلب تعيينها

a) γ يمثل الدائرة ذات المركز i و نصف القطر 1/2

b) γ يمثل الدائرة ذات المركز i- و نصف القطر 1/2

c) γ يمثل الدائرة ذات المركز o و نصف القطر 3/2

بالتوفيق

كلية العلوم الدقيقة — جامعة الشهيد حمه لخضر — قسم الرياضيات

2021/06/01 — 2 Maths

التصحيح المفصل لامتحان الدورة العادية لمقياس التحليل المركب

التمرين الأول: I) $\varphi(x,y) = e^{-y}\sin x$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = +e^{-y}\cos x \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -e^{-y}\sin x$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -e^{-y}\sin x \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = e^{-y}\sin x$

$\Rightarrow \Delta\varphi = -e^{-y}\sin x + e^{-y}\sin x = 0$ (1)

ومنه φ توافقية فهي تقبل مرافق توافقي $P(x,y)$ تحقق

$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = -e^{-y}\sin x \Rightarrow P(x,y) = e^{-y}\cos x + h(y)$ (1) نقاط

$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{-y}\cos x + h'(y) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e^{-y}\cos x \Rightarrow h'(y) = 0$ (0.5)

ومنه ثابت $h(y) = C$ (0.5) ، نقاط

$P(x,y) = e^{-y}\cos x + C$

الدالة الهولومورفية f من الشكل

$f(z) = P(x,y) + i\varphi(x,y) = e^{-y}\cos x + i e^{-y}\sin x + C = e^{iz} + C$ (0.5) (0.5)

II) $g(z)$ هولومورفية

$g(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ فإنه تحقق شرطي كوشي ريمان

(1) $U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = V_y$ و $U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -V_x$ نقاط 1

$U_x V_x + U_y V_y = 0 \Leftarrow U_x(-U_y) + U_y(U_x) = 0$ (1)

التمرين الثاني:

1) $\int_{\Gamma}(1-i+2\bar{z})dz = \int_0^{1+i}(1-i+2\bar{z})dz = 3(1-i)$ (1) $(y=x)$

(0.5) حيث $(x,y):(0,0)\to(1,1)$ ، $y=x^2$

2) $\int_{\Gamma}(1-i+2\bar{z})dz = \int_0^1 (1-i+2(x-ix^2))(dx+i\,d(x^2))$ (1)

$= 4-2i$ (1)

3) $\int_{\Gamma}(1-i+2\bar{z})dz = \int_0^1(1-i+2x)dx + \int_0^1(1-i+2(1-iy))(i\,dy)$ (1)

$= 1-i+1+1-i+2-i = 4-2i$ (1)

4) نلاحظ أن $(1) \neq (3)$ لأن الدالة $z \to 1-i+2\bar{z}$ ليست تحليلية

(1)

التمرين الثالث

a) $z_0 = i$ نقطة شاذة

$$\oint_{\gamma} \frac{z e^{\pi z}}{(z-i)(z^2+1)} dz = \oint_{C_1 : |z-i| = \frac{1}{2}} \frac{\frac{z e^{\pi z}}{(z+i)}}{(z-i)^2} = 2\pi i \left(\frac{z e^{\pi z}}{z+i} \right)'_{z=i}$$

(1)

$$= \frac{\pi}{2}(-1-2i) \quad (1)$$

b) $z_1 = -i$ نقطة شاذة

$$\oint_{\gamma} \frac{z e^{\pi z}}{(z-i)(z^2+1)} dz = \oint_{C_2 : |z+i| = \frac{1}{2}} \frac{\frac{z e^{\pi z}}{(z-i)^2}}{z+i} dz = 2\pi i \left(\frac{z e^{\pi z}}{(z-i)^2} \right)_{z=-i}$$

(1)

$$= -\frac{\pi}{2} \quad (1)$$

c) على الدائرة التي مركزها 0 ونصف قطرها $\frac{3}{2}$ لدينا $z_0 = i$ ، $z_1 = -i$
نقطتين شاذتين وبالتالي

$$\oint_{\gamma} \frac{z e^{\pi z}}{(z-i)(z^2+1)} dz = \oint_{C_1 : |z-i| = \frac{1}{2}} \frac{\frac{z e^{\pi z}}{z+i}}{(z-i)^2} dz + \oint_{C_2 : |z+i| = \frac{1}{2}} \frac{\frac{z e^{\pi z}}{(z-i)^2}}{z+i} dz$$

0.75 0.75

$$= \frac{\pi}{2}(-1-2i) + \frac{-\pi}{2} = -\pi(1+i)$$