التمرين الأول: 8 نقاط

نعتبر جسم صلب على شكل أسطوانة مساحة مقطعها S و ارتفاعها h و كتلتها الحجمية ρ_0، هذا الجسم يطوف على سطح الماء الذي كتلته الحجمية ρ_{eau} كما هو موضح في الشكل (1).

1- على ماذا تنص نظرية أرخميدس؟

2- عند التوازن أوجد عبارة الارتفاع h_0 المبين في الشكل (1).

3- أحسب قيمة h_0 حيث: $h = 24\ cm\ ,\ \rho_{eau} = 1000 kg/m^3\ ,\ \rho_0 = 0.25\ g/cm^3$

التمرين الثاني : 12 نقطة

نعتبر مائع مثالي غير قابل للإنضغاط كتلته الحجمية ρ يجري داخل أنبوب أفقي كما هو مبين في الشكل (2)، حيث أن الفرق في مستوى هذا المائع داخل الأنبوبين البيزومتريين هو $h = 25\ mm$.

مساحة مقطعي الأنبوب في النقطتين A و B هما على التوالي S_A و S_B. بحيث نضع: $\alpha = \frac{S_A}{S_B}$

1- على ماذا ترتكز طريقة أولر في وصف حركة الموائع؟

2- أكتب معادلة الاستمرارية ثم استنتج عبارة سرعة الجريان V_B بدلالة V_A و α.

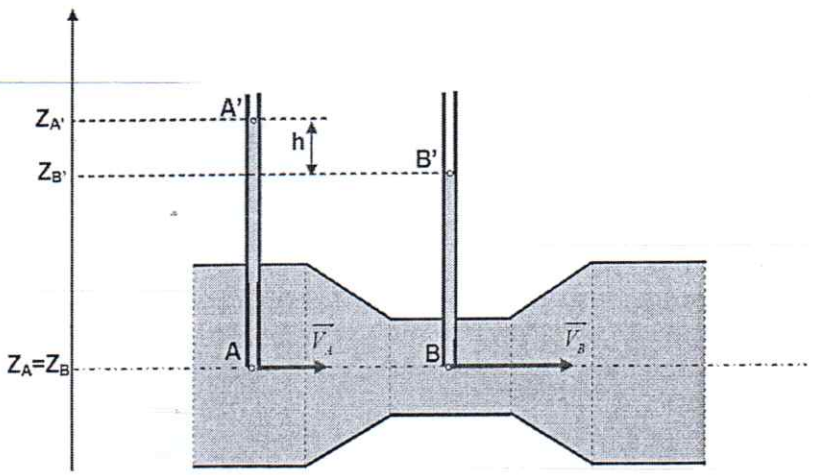
3- أكتب معادلة برنولي بين النقطتين A و B ثم استنتج عبارة $(P_A - P_B)$ بدلالة ρ، V_A و α.

4- لماذا مستوى الماء داخل الأنبوب البيزومتري A أعلى من مستوى الماء داخل الأنبوب البيزومتري B ؟

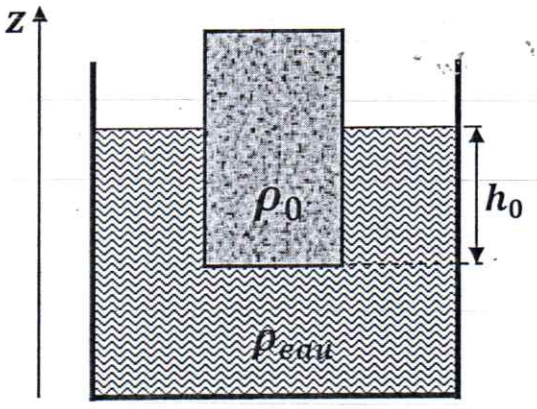
5- أكتب المعادلة الأساسية للموائع الساكنة بين النقطتين A و A'.

6- أكتب المعادلة الأساسية للموائع الساكنة بين النقطتين B و B'.

7- أوجد قيمة α بحيث يعطى: $V_A = 25\ cm/s\ ,\ \rho = 1000 kg/m^3\ ,\ g = 10 m/s^2$



الشكل (2)



الشكل (1)

التصحيح

التمرين الأول:

(3)

1 - تنص نظرية أرخميدس على أن كل جسم مغمور داخل مائع سيطبق عليه هذا المائع قوة شاقولية نحو الأعلى (دافعة أرخميدس) شدتها تساوي ثقل حجم المائع المزاح (هذا الحجم عادة هو مساو لحجم الجسم المغمور)

ونكتب: $\vec{P_A} = -\rho_{fluide} \cdot V \cdot \vec{g}$

2 - عبارة h_0:

عند التوازن لدينا: (1) $\sum \vec{F} = \vec{0}$

(1) $\vec{P_A} + \vec{P} = \vec{0}$

بالإسقاط على المحور z نجد:

$$\rho_{eau} \cdot V \cdot g - mg = 0$$

$$\rho_{eau} (S \cdot h_0) g - (\rho_0 \cdot S \cdot h) \cdot g = 0$$

$$\rho_{eau} \cdot h_0 - \rho_0 \cdot h = 0$$

$$\rightarrow \boxed{h_0 = h \frac{\rho_0}{\rho_{eau}}} \quad (1)$$

3 - حساب h_0:

$$h_0 = 0{,}24 \frac{850}{1000} \rightarrow \boxed{h_0 = 0{,}06\ m = 6\ cm}$$

(2)

التمرين الثاني :

(2)

1- ترتكز طريقة أولر على دراسة الفراغ المشغول بالمائع المتحرك. لذلك ففي هذه الطريقة نختار نقطة ما في الفراغ وندرس التغيرات التي تحدث لعناصر الحركة (الضغط، السرعة ...) عند انتقال من نقطة في الفراغ على أخرى وكذلك دراسة التغيرات في هذه العناصر عند نقطة ثابتة في الفراغ مع مرور الزمن.

2- معادلة الاستمرارية :

(0,5)

$$V_A \cdot S_A = V_B \cdot S_B \longrightarrow V_B = V_A \frac{S_A}{S_B} \longrightarrow \boxed{V_B = \alpha \cdot V_A}$$ (0,25)

3-

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 = P_B + \rho g z_B + \frac{1}{2}\rho V_B^2$$ (0,5)

$$z_A = z_B \longrightarrow (P_A - P_B) = \frac{1}{2}\rho (V_B^2 - V_A^2)$$

$$= \frac{1}{2}\rho (\alpha^2 V_A^2 - V_A^2)$$

$$\longrightarrow \boxed{(P_A - P_B) = \frac{1}{2}\rho V_A^2 (\alpha^2 - 1)} \longrightarrow (1)$$ (0,25)

4) لدينا حسب معادلتي الاستمرارية وبرنولي:

$$\begin{cases} VS = cste \\ P + \frac{1}{2}\rho V^2 = cste \quad : (z = cste) \end{cases}$$

ومنه نستنتج أن هناك علاقة طردية بين مساحة مقطع الأنبوب والضغط P، أي أنه كلما زادت مساحة مقطع الأنبوب زادت قيمة الضغط P وبالتالي يزداد ارتفاع المائع داخل الأنبوب البيزومتري والعكس صحيح، إذن سنجد حتما $(z_{A'} > z_{B'})$. (0,25)

5) $P_A + \rho g z_A = P_{A'} + \rho g z_{A'} \longrightarrow (P_A - P_{A'}) = \rho g (z_{A'} - z_A) \longrightarrow (*)$ (0,5)

6) $\ldots \quad (P_{B'} - P_B) = \rho g (z_{B'} - z_B) \longrightarrow (**)$

7) حساب α :

لدينا : $\begin{cases} P_{A'} = P_{B'} = P_{atm} \\ z_A = z_B \end{cases}$ (1) إذن حسب العلاقة (*) و (**) نجد :

$$P_A - P_B = \rho g (z_{A'} - z_{B'})$$

$$\rightarrow P_A - P_B = \rho g h \longrightarrow (2)$$

وحسب العلاقة (1) و (2) نجد :

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 (\alpha^2 - 1) = \rho g h$$

$$\rightarrow \alpha^2 - 1 = \frac{2gh}{v_A^2}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_A^2}}} \quad (1)$$

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{2 \times 10 \times 0{,}027}{(0{,}27)^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{\alpha = 3} \quad (1)$$