Exercice 1.
1. Soit $f \in E$. On a

$$\forall x \in [0,1] : \quad f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \Big\{ f'(0) + \int_0^t f''(s)\,ds \Big\}\,dt$$
$$= xf'(0) + \int_0^x \Big(\int_0^t f''(s)\,ds \Big)\,dt,$$

ce qui nous conduit à $\|f\|_\infty \leq \|f\|_E$.
2. Soit $f \in E$. On écrit

$$\varphi(f+h) - \varphi(f) = h'' - h^3 - 3f^2h - 3fh^2.$$

On choisit

$$D\varphi(f)(h) = h'' - 3f^2h \quad o(h) = -(h^3 + 3fh^2).$$

• Linéarité de $D\varphi(f)$: Soient $h, k \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} D\varphi(f)(\lambda h + k) &= (\lambda h + k)'' - 3f^2(\lambda h + k) \\ &= \lambda(h'' - 3f^2h) + k'' - 3f^2k \\ &= \lambda D\varphi(f)(h) + D\varphi(f)(k). \end{aligned}$$

• Continuité de $D\varphi(f)$: Comme $D\varphi(f)$ est linéaire et

$$\begin{aligned} \forall h \in E : \quad \|D\varphi(f)(h)\|_\infty &= \|h'' - 3f^2h\|_\infty \leq \|h''\|_\infty + \|-3f^2h\|_\infty \\ &\leq \|h''\|_\infty + 3\|f^2\|_\infty \|h\|_\infty \\ &\leq \underbrace{|f'(0)| + \|h''\|_\infty}_{=\|h\|_E} + 3\|f^2\|_\infty \|h\|_E \quad (\text{car } \|f\|_\infty \leq \|f\|_E) \\ &= (1 + 3\|f^2\|_\infty)\|h\|_E, \end{aligned}$$

l'application $D\varphi(f)$ est continue.
• Montrons que

$$\lim_{\|h\|_E \to 0} \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_E} = 0. \tag{1}$$

On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_E} &= \frac{\|-(h^3 + 3fh^2)\|_\infty}{\|h\|_E} \\ &\leq \frac{\|h\|_E^3 + 3\|f\|_\infty \|h\|_E^2}{\|h\|_E} \\ &= \|h\|_E^2 + 3\|f\|_\infty \|h\|_E \to 0 \quad \text{quand } \|h\|_E \to 0. \end{aligned}$$

Donc, la limite (1) est vérifiée. On déduit que φ est différentiable en tout $f \in E$ de différentielle

$$D\varphi(f) : E \to F,\ h \mapsto h'' - 3f^2h.$$

• Montrons que $D\varphi : E \to F$, $f \mapsto D\varphi(f)$ est continue : Soit $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite admettant une limite $f \in E$. On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \|D\varphi(f_j) - D\varphi(f)\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{\|h\|_E \leq 1} \|h'' - 3f_j^2h - (h'' - 3f^2h)\|_\infty \\ &\leq \sup_{\|h\|_E \leq 1} \|-3(f_j^2 - f^2)h\|_\infty \\ &\leq \sup_{\|h\|_E \leq 1} \big\{ 3\|h\|_\infty \|f_j^2 - f^2\|_\infty \big\} \\ &\leq 3\|f_j^2 - f^2\|_\infty = 3\|(f_j - f)(f_j + f)\|_\infty \\ &\leq 3\|f_j - f\|_\infty \|f_j + f\|_\infty \\ &\leq 3\|f_j - f\|_E \|f_j + f\|_E. \end{aligned} \tag{2}$$

Comme la suite $(f_j + f)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $2f$, la suite réelle $(\|f_j + f\|)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors, en passant à la limite dans (2), on obtient

$$\lim_{j\to+\infty} \|D\varphi(f_j) - D\varphi(f)\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0,$$

ce qui signifie que la suite $(D\varphi(f_j))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $D\varphi(f)$ dans $\mathcal{L}(E,F)$ et $D\varphi$ est continue. On conclut que $\varphi \in C^1(E,F)$.
3. On a $D\varphi(0_E) : E \to F$, $h \mapsto h''$. On sait que $D\varphi(f)$ est linéaire et continue. En outre, si $k \in F$, le problème

$$\begin{cases} h''(x) = k(x), \quad 0 < x < 1, \\ h(0) = h(1) = 0 \end{cases}$$

admet une unique solution dans $C^2([0,1],\mathbb{R})$ donnée par

$$\forall x \in [0,1] : \quad h(x) = \int_0^x \Big(\int_0^t k(s)\,ds \Big)\,dt - x \int_0^1 \Big(\int_0^t k(s)\,ds \Big). \tag{3}$$

Donc, $D\varphi(0_E)$ est bijective d'inverse $(D\varphi(0_E))^{-1} : F \to E$, $k \mapsto h$ où h est la fonction donnée par (3). Comme $(D\varphi(0_E))^{-1}$ est continue car $(D\varphi(0_E))^{-1}$ est linéaire et

$$\begin{aligned} \forall k \in E : \quad \|(D\varphi(0_E))^{-1}(k)\|_E &= |h'(0)| + \|h''\|_\infty \\ &= \Big| - \int_0^1 \Big(\int_0^t k(s)\,ds \Big) \Big| + \|k\|_\infty \\ &\le 2\|k\|_\infty, \end{aligned}$$

on déduit que $D\varphi(0_E) \in ISO(E,F)$.
4. Comme $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_\infty)$ sont deux espaces de Banach, $\varphi \in C^1(E,F)$ et $D\varphi(0_E) \in ISO(E,F)$, on déduit du théorème d'inversion locale qu'il existe un ouvert U_{0_E} contenant 0_E et un ouvert $V_{\varphi(0_E)}$ contenant $\varphi(0_E) = 0_F$ tels que $\varphi : U_{0_E} \to V_{\varphi(0_E)}$ est un difféomorphisme de classe C^1.
5. Comme V_{0_F} est un ouvert de F, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_F(0_F, \varepsilon) \subset V_{0_F}$, donc, si $g \in F$, $\|g\|_\infty < \varepsilon$, il existe une unique fonction $y \in U_{0_E} \subset E$ telle que $\varphi(y) = g$ puisque $\varphi : U_{0_E} \to V_{\varphi(0_E)}$ est bijective. Alors, $y \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ est une solution du problème

$$\begin{cases} y''(t) - y^3(t) = g(t), \quad 0 < t < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2.
1. Soit $f \in E$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(f+h)(t) - \varphi(f)(t) &= \int_0^t (f(s) + h(s))^2\,ds - \int_0^t (f(s))^2\,ds \\ &= 2\int_0^t f(s)h(s)\,ds + \int_0^t (h(s))^2\,ds. \end{aligned}$$

On choisit $D\varphi(f) : E \to E$, $h \mapsto D\varphi(h)$ où

$$\forall t \in [0,1] : \quad D\varphi(f)(h)(t) = 2\int_0^t f(s)h(s)\,ds$$

et

$$o(h)(t) = \int_0^t (h(s))^2\,ds.$$

• Linéarité de $D\varphi(f)$: Soient $h, k \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1] : \quad D\varphi(f)(\lambda h + k)(t) &= 2\int_0^t f(s)(\lambda h(s) + k(s))\,ds \\ &= 2\lambda \int_0^t f(s)h(s)\,ds + 2\int_0^t f(s)k(s)\,ds \\ &= \lambda D\varphi(f)(h)(t) + D\varphi(f)(k)(t). \end{aligned}$$

D'où, $D\varphi(f)(\lambda h+k)=\lambda D\varphi(f)(h)+D\varphi(f)(k)$.
• Continuité de $D\varphi(f)$: Comme $D\varphi(f)$ est linéaire et

$$\begin{aligned}\forall h\in E:\quad \|D\varphi(f)(h)\|_\infty &= 2\sup_{t\in[0,1]}\Big|\int_0^t f(s)h(s)\,ds\Big|\\ &\le 2\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t |f(s)h(s)|\,ds\\ &= 2\int_0^1 |f(s)h(s)|\,ds\\ &\le 2\|f\|_\infty\|h\|_\infty,\end{aligned}$$

l'application $D\varphi(f)$ est continue.
• Vérifions que

$$\lim_{\|h\|_\infty\to 0}\frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty}=0. \tag{4}$$

On a

$$\begin{aligned}0\le\frac{\|o(h)\|_\infty}{\|h\|_\infty} &= \frac{\sup\limits_{t\in[0,1]}\displaystyle\int_0^t (h(s))^2\,ds}{\|h\|_\infty}\\ &= \frac{\displaystyle\int_0^1 (h(s))^2\,ds}{\|h\|_\infty}\\ &\le \frac{\|h\|_\infty^2}{\|h\|_\infty}=\|h\|_\infty. \end{aligned}\tag{5}$$

En passant à la limite dans (5) quand $\|h\|_\infty$ tends vers 0, on obtient (4). Donc, l'application φ est différentiable en tout $f\in E$ et sa différentielle $D\varphi(f):E\to E$, $h\mapsto D\varphi(h)$ où

$$\forall t\in[0,1]:\quad D\varphi(f)(h)(t)=2\int_0^t f(s)h(s)\,ds.$$

• Montrons que $D\varphi:E\to\mathcal{L}(E)$, $f\mapsto D\varphi(f)$ est continue. Pour tout $f,g\in E$:

$$\begin{aligned}\|D\varphi(f)-D\varphi(g)\|_{\mathcal{L}(E)} &= 2\sup_{\|h\|_\infty\le 1}\sup_{t\in[0,1]}\Big|\int_0^t h(s)(f(s)-g(s))\,ds\Big|\\ &\le 2\sup_{\|h\|_\infty\le 1}\sup_{t\in[0,1]}\int_0^t |h(s)||f(s)-g(s)|\,ds\\ &= 2\sup_{\|h\|_\infty\le 1}\int_0^1 |h(s)||f(s)-g(s)|\,ds\\ &\le 2\sup_{\|h\|_\infty\le 1}\{\|h\|_\infty\|f-g\|_\infty\}\\ &\le 2\|f-g\|_\infty,\end{aligned}$$

ce qui montre que $D\varphi$ est lipschitzienne de rapport 2. D'où la continuité de $D\varphi$. On conclut que $\varphi\in C^1(E)$.

2. Pour tout $f, g \in B$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f)-\varphi(g)\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t (f(s)+g(s))(f(s)-g(s))\,ds\right| \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]}\int_0^t |f(s)+g(s)||f(s)-g(s)|\,ds \\
&= \int_0^1 |f(s)+g(s)||f(s)-g(s)|\,ds \\
&\leq \|f+g\|_\infty\|f-g\|_\infty \\
&\leq (\|f\|_\infty+\|g\|_\infty)\|f-g\|_\infty \\
&\leq 2\|f-g\|_\infty \quad (\text{car } \|f\|_\infty<1,\ \|g\|_\infty<1).
\end{aligned}$$

3.
3.1. Soit $f \in B$. On a $D\phi(f) : E \to E$, $h \mapsto D\phi(f)(h)$ où

$$\forall t\in[0,1]: \quad D\phi(f)(h)(t) = h(t) + \frac{2}{3}\int_0^t f(s)h(s)\,ds.$$

L'application $D\phi(f)$ est linéaire et continue. En outre, si $k \in E$, on a

$$\begin{aligned}
D\varphi(f)(h) = k &\Leftrightarrow \forall t\in[0,1]: \quad h(t)+\frac{2}{3}\int_0^t f(s)h(s)\,ds = k(t) \\
&\Leftrightarrow \forall t\in[0,1]: \quad \frac{2}{3}f(t)h(t) = (k(t)-h(t))' \text{ et } h(0)=k(0) \\
&\Leftrightarrow^{y=k-h} \forall t\in[0,1]: \quad y' = \frac{2}{3}f(t)(k(t)-y(t)) \text{ et } y(0)=0 ......(*)
\end{aligned}$$

Le problème $(*)$ admet une unique solution

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{-A(t)}\int_0^t f(s)k(s)e^{A(s)}\,ds, \quad A(\tau) = \frac{2}{3}\int_0^\tau f(s)\,ds.$$

Donc, il existe une unique fonction $h = k - y$ telle que $D\phi(f)(h) = k$. L'application $D\phi(f)$ est bijective d'inverse $(D\phi(f))^{-1} : E \to E$, $k \mapsto h = k - y$. Comme $(D\phi(f))^{-1}$ est continue, on déduit que $D\phi(f) \in ISO(E)$.
3.2. L'application φ est injective sur B. En effet, si $f, g \in B$ tels que

$$\forall t\in[0,1]: \quad f(t)+\frac{1}{3}\int_0^t (f(s))^2\,ds = g(t)+\frac{1}{3}\int_0^t (g(s))^2\,ds,$$

on trouve

$$\|f-h\|_\infty \leq \frac{2}{3}\|f-h\|_\infty.$$

Alors,

$$0 \leq \frac{1}{3}\|f-h\|_\infty \leq 0.$$

D'où, $f = g$. Donc, comme $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, B est un ensemble ouvert de E, $\phi \in C^1(E)$ et $D\phi(f) \in ISO(E)$ pour tout $f \in B$, on déduit du théorème d'inversion globle que $\phi : B \to \phi(B)$ est un difféomorphisme de classe C^1.