جامعة الشهيد حمه لخضر كلية العلوم الدقيقة قسم الفيزياء	03/06/2021	السنةالثانية ليسانس فيزياء 2021-2020

تصحيح إمتحان ميكانيك الكم

التمرين الأول:(8 نقاط)

1. التفسيرالإحصائي للدالة الموجية ينص على أن مربع طويلة الدالة الموجية يعطي إحتمال العثور على الجسيم عند النقطة $\vec{r} = (x, y, z)$ في اللحظة t، أو بلغة أكثر دقة احتمال العثور على الجسيم بين النقطتين a و b في اللحظة t يعطى بـ

$$P_{ab} = \int_a^b |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r.$$

02pts

2. القيم الذاتية للمدركات تمثل نتائج القياس الممكنة لها. 02pts

3. تشكل الدوال الذاتية للمدركات أسسا في فضاء هيلبرت. 02pts

4. أثبتتا تجربة دافيسون و جرمر و تجربة شقي يونغ الطبيعة الموجية للجسيمات. 02pts

التمرين الثاني:(12 نقطة)

1. تعين قيمة A بدلالة α:

$$\begin{aligned}
(\psi, \psi) = \langle\psi|\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 \; dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^\star(x,t)\psi(x,t) \; dx \\
&= A^2 \int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x} \; dx + A^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha x} \; dx = 2A^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha x} \; dx \\
&= 2A^2 \left(\frac{-1}{2\alpha}\right) e^{-2\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{A^2}{\alpha} = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{A = \sqrt{\alpha}}$$

02pts

2. حساب القيم المتوسطة:

$$
\begin{aligned}
\langle x\rangle = \langle\psi\,|x|\,\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^\star(x,t)x\psi(x,t)\;dx\\
&= \alpha\int_{-\infty}^{0} xe^{2\alpha x}\;dx + \alpha\int_{0}^{+\infty} xe^{-2\alpha x}\;dx\\
&= -\alpha\int_{0}^{+\infty} xe^{-2\alpha x}\;dx + \alpha\int_{0}^{+\infty} xe^{-2\alpha x}\;dx
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\langle x\rangle = 0}$$ 2.5pt

$$
\begin{aligned}
\langle p_x\rangle = \langle\psi\,|p_x|\,\psi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\psi^\star(x,t)p_x\psi(x,t)\;dx\\
&= \alpha^2\frac{\hbar}{i}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha x}\;dx - \alpha^2\frac{\hbar}{i}\int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha x}\;dx\\
&= \alpha^2\frac{\hbar}{i}\int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha x}\;dx - \alpha^2\frac{\hbar}{i}\int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha x}\;dx
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\langle p_x\rangle = 0}$$ 2.5pt

3. الكمون الذي تحقق من أجله الدالة الموجية ψ معادلة شرودنغر:

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} &= H\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V\psi(x,t)\\
&\Longrightarrow V\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} &= \begin{cases}\hbar\omega\alpha e^{\alpha x}e^{-i\omega t} & x\le 0,\\ \hbar\omega\alpha e^{-\alpha x}e^{-i\omega t} & x\ge 0.\end{cases}\\
&= \hbar\omega\times\begin{cases}\alpha e^{\alpha x}e^{-i\omega t} & x\le 0,\\ \alpha e^{-\alpha x}e^{-i\omega t} & x\ge 0.\end{cases}\\
&= \hbar\omega\psi(x,t).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} &= \begin{cases}\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\left(\alpha e^{-i\omega t}e^{\alpha x}\right) & x\le 0,\\ \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\left(\alpha e^{-i\omega t}e^{-\alpha x}\right) & x\ge 0.\end{cases}\\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\times\begin{cases}\alpha e^{-i\omega t}e^{\alpha x} & x\le 0,\\ \alpha e^{-i\omega t}e^{-\alpha x} & x\ge 0.\end{cases}\\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi(x,t).
\end{aligned}
$$

$$V\psi(x,t) = \hbar\omega\psi(x,t) + \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi(x,t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{V = \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2}$$ 03pt

4. إثبات أن الدالة الموجية $\psi(x,0)$ هي دالة ذاتية لمؤثر الطاقة $\hat{H}$:

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \alpha e^{\alpha x} & x \leq 0, \\ \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi(x,0) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,0)}{\partial x^2} + V\psi(x,0) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi(x,0) + \left(\hbar\omega + \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\right)\psi(x,0). \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\hat{H}\psi(x,0) = \hbar\omega\psi(x,0)}$$ 02pt

إذن الدالة الموجية $\psi(x,0)$ هي دالة ذاتية لمؤثر الطاقة $\hat{H}$ مرفقة بالقيمة الذاتية $\hbar\omega$.