جامعة الشهيد حمة لخضر-الوادي

قسم الرياضيات — السنة الجامعية: 2020/2021

المستوى: سنة ثالثة رياضيات — مقياس: مدخل الى نظرية المؤثرات

الحل النموذجي لاختبار السداسي الثاني

التمرين الأول: (6ن) ليكن $S,T \in \mathcal{L}(H)$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ حيث H فضاءا هيلبرتيا. اثبت ان :

(١). $(ST)^* = T^*S^*$.

$$\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S^*\rangle$$
$$= \langle x, T^*S^*y\rangle \Rightarrow (ST)^* = T^*S^*.$$

(٢). $\ker T = (ImT^*)^{\perp}$.

$$x \in \ker T \Longleftrightarrow \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = 0, \forall y \in H$$
$$\Longleftrightarrow x \in (ImT^*)^{\perp}.$$

(٣). $\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|_{\mathcal{L}}$.

باستعمال العكس النقيض، اذا كان $|\lambda| > \|T\|_{\mathcal{L}}$ فان

$$\|I + \frac{1}{\lambda}(T - \lambda I)\|_{\mathcal{L}} = \frac{\|T\|_{\mathcal{L}}}{|\lambda|} < 1$$

اذن $(T - \lambda I)$ قابل للقلب ومنه $\lambda \in \rho(T)$.

التمرين الثاني: (8ن) ليكن $E = L^2([0,1], \mathbb{R})$، من اجل كل $t \in [0,1]$ نعرف مؤثرا T من E نحو E كالتالي $Tx = tx(t)$

(١). **بين ان T محدودا، ثم احسب نظيمه.**

$$|Tx|^2 \leq t^2|x|^2 \Rightarrow \|Tx\|^2_{L^2} \leq \|x\|^2 \int_0^1 t^2 dt$$
$$\Rightarrow \|Tx\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{3}\|x\|^2$$
$$\Rightarrow \|Tx\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\|x\|.$$

من اجل $x_0 = 1$ لدينا $\|Tx\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\|Tx\|_{L^2} = 1$ ومنه

$$\frac{\|Tx\|_{L^2}}{\|x\|_{L^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \sup_{0\leq t\leq 1} \frac{\|Tx\|_{L^2}}{\|x\|_{L^2}} = \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)}$$

ومنه $\|T\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(٢). اثبت ان T قرينا لنفسه.

$$\langle Tx, y\rangle = \int_0^1 tx(t)\overline{y(t)}dt$$
$$= \int_0^1 x(t)\overline{ty(t)}dt$$
$$\Rightarrow T^*y(t) = ty(t) = Ty(t).$$

(٣). بين ان T لايقبل اية قيمة ذاتية.

اذا كانت λ قيمة ذاتية لـ T فانه يوجد x غير معدوم يحقق المعادلة

$$tx(t) = \lambda x(t) \Rrightarrow (t-\lambda)x(t) = 0, \forall t \in [0,1] \Rightarrow x = 0$$

وهذا تناقض كون الحل غير معدوم.

(٤). بين انه اذا كان $\lambda \notin [0,1]$ فان المؤثر $(T-\lambda I)$ يقبل مقلوبا مستمرا على E. استنتج ان $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.

لنفرض ان $\lambda \notin [0,1]$ اذن

$$d(\lambda, [0,1]) = \inf_{t\in[0,1]} d(\lambda, t) = m > 0$$

لنبين ان $(T-\lambda I)$ قابل للقلب ومستمر على $L^2([0,1], \mathbb{R}$

$$y = (T-\lambda I)x = (\lambda - t)x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda - t}y$$

اذن المؤثر $(T-\lambda I)^{-1}$ خطي و معرف على $L^2([0,1], \mathbb{C})$ ولنبين انه مستمر

$$\|(T-\lambda I)^{-1}x\|_{L^2} = \|\frac{1}{\lambda - \alpha_n}x\|_{L^2} \leq \frac{1}{m}\|x\|_{L^2}$$
$$\Rightarrow (T-\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2)$$
$$\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \Rrightarrow \lambda \notin [0,1] \Rrightarrow \lambda \notin \sigma(T)$$

باخذ العكس النقيض لهذا الاستلزام نجد $\sigma(T) \subseteq [0,1]$.

التمرين الثالث: (6ن) لتكن (α_n) متتالية محدودة في $\mathbb{C}$ نعرف من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n و $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{C}$ مؤثرا $Tx = \alpha_n x$

(١). تحقق ان $Tx \in \ell^2(\mathcal{C})$ ، ثم بين ان T محدودا.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|Tx|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n x_n)^2 \leq \sup_{n\geq 1}|\alpha_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty Tx \in \ell^2(\mathcal{C}).$$
$$\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n x_n)^2 \leq \|\alpha\|_{\infty}^2 \Rightarrow \|Tx\|_{\ell^2} \leq \sup_{n\geq 1}\alpha_n\|x\|_{\ell^2}$$

(٢). اوجد المؤثر القرين T^*.

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n \overline{y_n}dt = \int_0^1 x(t)\overline{ty(t)}dt \Rightarrow T^*y = \overline{\alpha_n}y.$$

(٣). اثبت من اجل كل $\alpha_n, n \geq 1$ هي قيمة ذاتية لـــ T.

تكون λ قيمة ذاتية للمؤثر T اذا قبلت المعادلة التالية حلا غير معدوم

$$\alpha_n x = \lambda x \Rightarrow \lambda = \alpha_n, \forall n \geq 1$$

يوجد حل غير معدوم وهو e_1 وهكذا من اجل $\lambda = \alpha_n$ يوجد حل غير معدوم وهو e_n. اذن من اجل كل n من $\mathbb{N}$ α_n قيمة ذاتية.