قسم الفيزياء	جامعة الشهيد حمه لخضر – الــوادي	مقيـاس: الرياضيات 2
السّنة الأولى علوم المادة	كلية العلوم الدقيقة	السّنة الجامعية:2021/2020

التصحيـح النمـوذجي لامتحان الدورة العادية للسّداسي الثاني — المدّة: ساعة و نصف

التمرين الأول: (05 نقاط)

0,5 — لدينا: $\sqrt{1+4x} = (1+4x)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}(4x) - \frac{1}{8}(4x)^2 + o(x^2)$

$= 1+2x-2x^2+o(x^2)$

0,5 — $\sin^2 x = x^2 + o(x^2)$

$\ln(1-2x) = \ln(1+(-2x)) = (-2x) - \frac{(-2x)^2}{2} + o(x^2)$

0,5 — $= -2x - 2x^2 + o(x^2)$

وبالتالي:

1,5 — $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+4x}+\sin^2 x+\ln(1-2x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-3x^2+o(x^2)}{x^2} = -3$

0,5 — نضع $x=1+t$ أي $t=x-1$

ومادام x في جوار 1 فإن t في جوار 0

0,5 — وبالتالي: $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sin\pi(x-1)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sin\pi t}$

1 — $= \lim_{t\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}t-1+o(t)}{\pi t+o(t)} = \frac{1}{2\pi}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1,5 — • $I_1 = 3\int\frac{1}{x^2+3^2}\,dx = 3\times\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3}+c$

$= \arctan\frac{x}{3} + c,\quad c\in\mathbb{R}$

1 — $I_2 = \int\frac{1}{x^2+x}\,dx = \int\frac{1}{x(x+1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

0,5 — $= \ln(x) - \ln(x+1)+c$

$= \ln\frac{x}{x+1}+c,\quad c\in\mathbb{R}$

	• حساب I_3 : نستعمل المكاملة بالتجزئة :
1	$u = \ln(1+x) \longrightarrow u' = \frac{1}{x+1}$ $v' = \frac{1}{x^2} \longrightarrow v = -\frac{1}{x}$
0,5	ومنه : $I_3 = -\frac{1}{x}\ln(1+x) + \int \frac{1}{x(x+1)}dx$
	$= -\frac{1}{x}\ln(1+x) + I_2$
0,5	$= -\frac{1}{x}\ln(1+x) + \ln\frac{x}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$
	التمرين الثالث : (05 نقاط)
0,5	حلها العام : $y = y_s + y_p$
1,5	$y_s = ce^{-\int a(x)dx} = ce^{-\int 2dx} = ce^{-2x}, \quad c \in \mathbb{R}$
0,5	ثم نضع : $y_p = c(x)e^{-2x}$
0,5	لنجد : $y_p' = c'(x)e^{-2x} - 2c(x)e^{-2x}$
0,5	وبالتعويض نجد : $c'(x) = xe^{x}$
	ومنه $c(x) = \int xe^{x}dx$
	نستعمل المكاملة بالتجزئة :
0,5	$u = x \longrightarrow u' = 1$ $v' = e^{x} \longrightarrow v = e^{x}$
	ومنه : $c(x) = xe^{x} - e^{x}$
0,5	إذن : $y_p = xe^{-x} - e^{-x}$
0,5	فالحل العام : $y = ce^{-2x} + xe^{-x} - e^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}$
	التمرين الرابع : (05 نقاط)
	- تعيين القيم الذاتية :
0,5	(λ قيمة ذاتية لـ A) $\iff \det(A - \lambda I) = 0$
	$\iff \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

	ومنه $(2-\lambda)(3-\lambda)-2=0$
	أي $\lambda^2-5\lambda+4=0$
0,5	نجد : $\lambda=1$ أو $\lambda=4$
	A تقبل قيمتين ذاتيتين مختلفتين 1 ؛ 4 .
	ممّا يعني أنها قابلة للتأقطر مادام A من الرتبة 2x2.
	- تعيين الأشعة الذاتية:
	ليكن $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي مرافق للقيمة الذاتية λ
	$AX=\lambda X$
	يعني :
0,5	فينتج $\begin{cases}2x_1+x_2=\lambda x_1\\2x_1+3x_2=\lambda x_2\end{cases}$
0,5	• من أجل $\lambda=1$ ، نجد $\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$ ينتج : $x_2=-x_1$
0,5	ومنه $X=\begin{pmatrix}x_1\\-x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ، فنختار $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي مرافق لـ 1
0,5	• من أجل $\lambda=4$ ، نجد $\begin{cases}-2x_1+x_2=0\\2x_1-x_2=0\end{cases}$ ينتج : $x_2=2x_1$
0,5	ومنه $X=\begin{pmatrix}x_1\\2x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ، فنختار $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ شعاع ذاتي مرافق لـ 4.
	- تعيين المصفوفة القطرية D المرافقة لـ A:
	لدينا $D=P^{-1}AP$
	لنضع $P=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$ ، نجد $\det(P)=3\neq0$
0,5	ومنه $P^{-1}=\frac{1}{3}\,{}^t\begin{pmatrix}2&1\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$
	وبالتالي $D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}$
1	$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\0&12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$
	ملاحظة: إذا اخترنا $P=\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}$ نجد $D=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$.