ثانية رياضيات
تحليل عددي

تصحيح الامتحان
(السداسي الثاني)

التمرين الأول (08 نقاط):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) تكون A معرفة وموجبة إذا تحقق:

$$X^t A X > 0 \quad \forall X / X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لدينا:

$$X^t A X = (x_1 , x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ 2

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 \geq 0$$

من أجل $x_1 = -x_2 \neq 0$ فإن: $X^t A X = 0$ 2

ومنه A موجبة لكن غير معرفة. 1+1

2) طريقة غوص-جوردان لإيجاد المصفوفة العكسية

$$[A : I] \longrightarrow [I , A^{-1}]$$

نعتمد الطريقة على تحويل A عن طريق الحذف
إلى المصفوفة الوحدة I وكل التغيرات التي تقع
① على A تقع أيضا على المصفوفة I .
عند تحويل A إلى I فإن I تتحول إلى A^{-1}

2) الخطوة الاولى:

① $a_{11}=1$ ، $a_{21}=0$ بما أن $a_{21}=0$ نمر إلى

الخطوة الثانية:

$a_{22}=1$ من أجل الحصول على $a''_{12}=0$:

② $L_1 \longrightarrow L_1 - 2L_2$: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

ومنه: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $[I, A^{-1}]$

التمرين الثاني: (12)

1) الجملة تكتب على الشكل:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

1. الشكل التكراري لجاكوبي :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -1 + 2x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 10 - 2x_1^{(k)} - 7x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 2 - x_2^{(k)} \end{cases}$$

أي :

$$X^{(k+1)} = T_J X^{(k)} + C_J$$

حيث :

$$T_J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad C_J = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) الشعاع الطيفي لـ T_J : $\rho(T_J) = \max_i |\lambda_i|$

λ_i : القيم الذاتية لـ T_J حلول المعادلة المميزة :

$$\det(T_J - \lambda I) = 0 : \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -2 & -\lambda & -7 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

أي : $-\lambda^3 + 3\lambda = 0 : -\lambda(\lambda^2 - 3) = 0$

$$\lambda_1 = 0 ; \quad \lambda_2 = \sqrt{3} ; \quad \lambda_3 = -\sqrt{3}$$

$$\rho(T_J) = \sqrt{3} > 1$$

إذن طريقة جاكوبي تتباعد

لأن : $\rho(T_J) > 1$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3) لدينا: $AX = b$ أي:

$$(D - L - U)X = b$$

ومنه: $DX = (L+U)X + b$

إذن: $DX^{(k+1)} = (L+U)X^{(k)} + b$

نتحصل على: $X^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)X^{(k)} + D^{-1}b$

من (1) لدينا: $X^{(k+1)} = T_J X^{(k)} + C_J$

إذن: $T_J = D^{-1}(L+U)$.

حسابيا:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = D^{-1}$$

إذن:

$$D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = T_J$$

الممسوحة ضوئيا بـ