Correction d'examen de semi-groupe

Exc n°1 (6pts) :

1) On sait que la application $t \mapsto T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans X, pour tout $x \in X$.
Et on sait que si $f : [a, b] \longrightarrow X$ est continue
Alors, $$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\, ds = f(a) \quad (*)$$
par $(*)$ on prend $a = t$, $t = h$ et
$f(s) = T(s)x$, on trouve le résultat

2) Soit $x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. posons $x_n = \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x\, d$

On a $x_n \in D(A)$ et d'après (1) on trouve
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{1}{n}} T(s)x\, ds = x.$$
D'où, $\overline{D(A)} = X$.

3) $\forall x \in X$, $\forall h > 0$, on a
$$\left(\frac{T(h) - I}{h}\right)\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = \frac{1}{h}\left(\int_0^t (T(h+s)x - T(s)x)\, ds\right)$$
$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{t+h} T(s)x\, ds - \int_0^t T(s)x\, ds\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \int_0^{h} T(s)x\,ds\right)$$

$$\xrightarrow[h \to 0^+]{} T(t)x - x.$$

Ex n° 2 (8 pts) :

1) a) On a $T(0)x_n = x_n$ d'où $T(0) = I$.

b) $\forall t, s \geq 0$, on a $T(t)T(s)x_n = T(t)(e^{-\alpha_n s} x_n)$

$$= e^{-\alpha_n t} e^{-\alpha_n s} x_n = e^{-\alpha_n (t+s)} x_n$$

$$= T(t+s) x_n.$$

Donc $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0$.

2) $\forall t \geq 0$, $\forall (x_n) \subset l_p$, nous avons

$$\|T(t)x_n - x_n\| = \|e^{-\alpha_n t} x_n - x_n\|$$

$$= \|(e^{-\alpha_n t} - 1) x_n\|$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |(e^{-\alpha_n t} - 1) x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

comme $\sum_{n=1}^{+\infty} |(e^{-\alpha_n t} - 1) x_n|^p = \sum_{n=1}^{+\infty} |e^{-\alpha_n t} - 1|^p |x_n|^p$

$$\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p,$$

est convergente. D'où la série est uniformément convergente. Donc

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x_n - x_n\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \to 0} |e^{-\alpha_n t} - 1|^p |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Donc $(T(t))_{t\geq 0}$ est C_0 - semi-groupe.

3) On a

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x_n - x_n}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(e^{-\alpha_n t} - 1)x_n}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} (-\alpha_n e^{-\alpha_n t}) = -\alpha_n x_n .$$

D'où $D(A) = \{x_n \in l_p ; \alpha_n x_n \in l_p\}$,

et $A x_n = -\alpha_n x_n$.

<u>Ex n°3</u> : (6 pts) ;

1) On pose $u(t) = v(x,t)$, on trouve

$$\begin{cases} u'(t) = A u(t), & t \geq 0 \\ u(0) = \sin x & , \end{cases}$$

où $A = -\frac{d}{dx}$ avec $D(A) = H^1(\mathbb{R})$

$= \{u \in L^2(\mathbb{R}), u' \in L^2(\mathbb{R})\}$.

2) Comme A est le g.i du C_0-semi-groupe défini sur X par : $T(t)f(x) = f(x-t)$

on a $f(x) = \sin x$. Donc

$T(t)f(x) = \sin(x-t)$.

D'où $v(x,t) = \sin(x-t)$.