التّصحيح النموذجي لامتحان الدورة العاديّة لمقياس التحليل-II -

التمرين الأول: (5 ن)

1-لحساب التكامل: $I=\int \frac{t^2+1}{t^2+2t+1}dt$

لدينا: $\frac{t^2+1}{t^2+2t+1}=1-\frac{2t}{(t+1)^2}$ **0.5 ن**

لنعيّن العددين A,B حيث: $\frac{2t}{(t+1)^2}=\frac{A}{(t+1)}+\frac{B}{(t+1)^2}$

لنجد بعد الحساب:

$$\frac{2t}{(t+1)^2}=\frac{2}{(t+1)}-\frac{2}{(t+1)^2}$$ **1 ن**

و عليه:

$$I=\int\left(1-\frac{2t}{(t+1)^2}\right)dt=\int\left(1-\frac{2}{(t+1)}+\frac{2}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$=\int dt-2\int\frac{dt}{t+1}+2\int\frac{dt}{(t+1)^2}$$

$$=t-2\ln|t+1|-\frac{2}{t+1}+c$$ **1 ن**

2- استنتاج التكامل: $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(1+\cos x)(1+\sin x)}$

بوضع: $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ لدينا: **4 x0.25 ن**

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ و } \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \text{، } dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

و الحدود الجديدة هي : $\begin{cases} t(0)=\tan(0)=0 \\ t\left(\frac{\pi}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}$ **0.5 ن**

ومنه:

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(1+\cos x)(1+\sin x)}$$

$$=\int_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

$$=\int_0^1\frac{2(1+t^2)dt}{(1+t^2+1-t^2)(1+t^2+2t)}=\int_0^1\frac{t^2+1}{t^2+2t+1}dt$$ **0.5 ن**

$$=\left[t-2\ln|t+1|-\frac{2}{t+1}\right]_0^1=1-2\ln 2-1-(0-2)=2-2\ln 2$$

0.5 ن

التمرين الثاني: (5 ن)

-1

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$ **3 x0.5 ن**

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+o(x^2)$$

2- لحساب النشر المحدود من الرتبة 2 في جوار 0 للدّالة

لدينا: $f(x)=\frac{e^x\ln(1+x)}{1+x}$

$$e^x\ln(1+x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$ **0.5 ن**

$$=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$ **0.5 ن**

و عليه:

$$f(x)=\left(e^x\ln(1+x)\right)\frac{1}{1+x}$$ **0.5 ن**

$$=\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-x+x^2+o(x^2)\right)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$ **0.5 ن**

أو بالقسمة حسب القوى المتزايدة للنشر البسط على $1+x$

3- ولحساب $\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{1-\cos(x)}$

لدينا في جوار 0:

$$x-f(x)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$ **0.5 ن**

$$1-\cos(x)=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$ **0.5 ن**

و عليه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}{1+\frac{o(x^2)}{x^2}}=1$$ **0.5 ن**

التمرين الثالث: (5 ن)

1- لحساب التكامل: $K=\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$

نضع بالتجزئة: $\begin{cases} u'=1 \Rightarrow u=x \\ v=\ln\left(1+x^2\right) \Rightarrow v'=\dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases}$ **1 ن**

وبالتّالي:

$$I=\left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1-2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$$ **0.5 ن**

$$=\left[x\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1-2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$ **1 ن**

$$=\left[x\ln\left(1+x^2\right)-2x+2\arctan(x)\right]_0^1$$

$$=\ln 2-2+2\arctan(1)$$

$$=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$$ **0.5 ن**

2- لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln\left(n^2+k^2\right)-2\ln(n)}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(n^2+k^2\right)-2\ln(n)\right)$$ **1 ن**

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n^2+k^2\right)-\ln\left(n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0.5 ن حيث $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ وبمأنّ f مستمرة على المجال $[0,1]$ فهي قابلة للمكاملة حسب ريمان على $[0,1]$ و عليه:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\ln\left(n^2+k^2\right)-2\ln(n)}{n}\right)$$ **0.5 ن**

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$$

التمرين الرابع: (5 ن)

1- حلّ المعادلة التفاضليّة:

$$y'+\tan(x)y=\sin x.\cos x \cdots\cdots\cdots(E)$$

نعلم أنّ (E) خطّية من الرتبة الأولى حلّها العام من الشكل:

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$ **0.5 ن**

حيث $y_h(x)$ حلّ عام للمتجانسة و $y_p(x)$ حلّ خاص لـ (E)

- لحساب $y_h(x)$ بفصل المتغيرات و المكاملة نجد:

$$y_h(x)=Ke^{-\int \tan x dx}=Ke^{\ln|\cos x|}=\pm K\cos x=C\cos x$$ **1 ن**

- و لحساب $y_p(x)$ **نستعمل طريقة تغيير الثابت** هو من الشكل:

$$y_p(x)=C(x)\cos x$$ **0.5 ن**

بالاشتقاق و التعويض في (E) نجد:

$$C'(x)\cos x-C(x)\sin x+\tan(x)C(x)\cos x$$
$$=\sin x\cdot\cos x$$

أي أنّ: $C'(x)=\sin x$ **0.5 ن**

و بالمكاملة نجد: $C(x)=-\cos x$ **0.5 ن**

و منه : $y_p(x)=C(x)\cos x=-\cos x\cdot\cos x=-\cos^2 x$

و عليه الحلّ العام لـ (E) هو:

$$y(x)=C\cos x-\cos^2 x \qquad C\in\mathbb{R}$$ **0.5 ن**

2- حساب الحلّ الوحيد لـ (E) الذي يحقق: $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

بالتعويض في الحلّ العام نجد:

$$0=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=C\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2$$ **0.5 ن**

$$0=C\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{4}\Rightarrow C=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ **0.5 ن**

عليه الحلّ المطلوب هو:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\cos^2 x$$ **0.5 ن**

بالتوفيق للجميع

الاسم و اللقب	الفوج	العلامة
....	....	